Anna Lachowska

Analyse I – Corrigé de la Série 4

Exercice 1.

i) *a)* Pour $n = n_0 = 1$ on a

$$1 = \sum_{k=1}^{1} k = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \ ,$$

c.-à-d. $P(1)$ est vraie.

b) Pour $n \geq n_0 = 1$ on a (on indique par $\overset{P(n)}{=}$ l'égalité où on utilise la propriété $P(n)$),

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) \overset{P(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)}{2} \ ,\end{aligned}$$

et $P(n)$ implique donc $P(n+1)$ pour $n \geq n_0$.

ii) *a)* Pour $n = n_0 = 1$ on a

$$1 = \sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1 \ ,$$

et $P(1)$ est donc vraie.

b) Pour $n \geq n_0 = 1$ on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 \overset{P(n)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)\big((n+2)(2n+3)\big)}{6} \\ &= \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)\big(2(n+1)+1\big)}{6} \ ,\end{aligned}$$

et $P(n)$ implique donc $P(n+1)$ pour $n \geq n_0$.

iii) *a)* Pour $n = n_0 = 1$ on a

$$\frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

c.-à-d. $P(1)$ est vraie.

b) Pour $n \geq n_0 = 1$ on a

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \overset{P(n)}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

et $P(n)$ implique donc $P(n+1)$ pour $n \geq n_0$.

iv) *a*) Pour $n = n_0 = 1$ on a

$$1 = \sum_{k=1}^{1} k^3 = \left(\frac{1}{2}(1+1)\right)^2 = 1$$

c.-à-d. $P(1)$ est vraie.

b) Pour $n \geq n_0 = 1$ d'une part on a

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{P(n)}{=} \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2 + (n+1)^3$$
$$= (n+1)^2 \left(\left(\frac{1}{2}n\right)^2 + (n+1)\right) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \left(n^2+4n+4\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right)^2$$

et $P(n)$ implique donc $P(n+1)$ pour $n \geq n_0$.

v) Pour calculer cette somme on utilise les résultats précédents en effectuant le changement de variable $l = k+1$. Il ne faut pas oublier de changer les indices de début et de fin de la somme lors d'un changement d'indice. Ici : $k = 0 \Rightarrow l = 1$ et $k = 1000 \Rightarrow l = 1001$. On obtient donc

$$\sum_{k=0}^{1000}(k+1)(3k+2) = \sum_{l=1}^{1001} l(3l-1) = 3\sum_{l=1}^{1001} l^2 - \sum_{l=1}^{1001} l$$
$$= 3\frac{1001 \cdot 1002 \cdot 2003}{6} - \frac{1001 \cdot 1002}{2}$$
$$= \frac{1001 \cdot 1002}{2}(2003-1) = 1001^2 \cdot 1002$$
$$= 1\,004\,005\,002\ .$$

vi) Pour calculer cette somme, nous pourrions utiliser la formule $(a^2-b^2) = (a-b)(a+b)$ et le résultat de questions *i*) et faire comme pour la question précédente. Notamment, on peut écrire en dénotant $m = 476$:

$$\sum_{k=1}^{m}(k^2-(k-1)^2) = \sum_{k=1}^{m}(k-(k-1))(k+(k-1)) = \sum_{k=1}^{m}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{m} k - \sum_{k=1}^{m} 1 =$$
$$\overset{i)}{=} 2\frac{m(m+1)}{2} - m = m^2.$$

Cependant, il apparaît très vite en écrivant les premiers termes de cette somme que nous avons affaire à une somme télescopique. (c'était également le cas à la question *iii*) mais pour la faire apparaître il fallait effectuer une décomposition en éléments simples que nous n'avons pas encore vue en cours)
En effet, si l'on écrit les premiers termes de la somme, on obtient

$$\begin{aligned} 1^2 - 0^2 \\ +2^2 - 1^2 \\ +3^2 - 2^2 \\ + \dots \end{aligned}$$

Ainsi, on remarque que le premier terme de chaque indice s'annulera toujours avec le second terme de l'indice suivant. Il ne restera plus qu'au final que le premier terme du dernier indice et le second terme du premier indice et on obtient alors

$$T = 476^2 - 0^2 = 476^2 = 226\,576$$

Exercice 2.

a) On a $F_0 = 2^{(2^0)} + 1 = 2^1 + 1 = 3$, et $F_1 = 2^{(2^1)} + 1 = 2^2 + 1 = 5$. Pour $n = n_0 = 1$ on a

$$5 = F_1 = \prod_{k=0}^{0} F_k + 2 = F_0 + 2 = 3 + 2 = 5 \ ,$$

et $P(1)$ est donc vraie.

b) Pour $n \geq n_0 = 1$ on a

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= 2^{(2^{n+1})} + 1 = 2^{(2 \cdot 2^n)} + 1 = \left(2^{(2^n)}\right)^2 + 1 = \left(2^{(2^n)}\right)\left(2^{(2^n)}\right) + 1 = (F_n - 1)^2 + 1 \\ &= F_n\,(F_n - 2) + 2 \overset{P(n)}{=} F_n \left(\prod_{k=0}^{n-1} F_k\right) + 2 = \prod_{k=0}^{n} F_k + 2 = \prod_{k=0}^{(n+1)-1} F_k + 2 \end{aligned}$$

et $P(n)$ implique donc $P(n+1)$ pour $n \geq n_0$.

Exercice 3. Pour obtenir l'expression pour $\sum_{k=0}^{n} a + kd$ on utilise les propriétés des sommes des nombres réels et les resultats d'Ex.1. On écrit:

$$\sum_{k=0}^{n} a + kd = a \sum_{k=0}^{n} 1 + d \sum_{k=0}^{n} k = (n+1)a + d \sum_{k=0}^{n} k \overset{\text{Ex.1 }(i)}{=} (n+1)a + d\frac{n(n+1)}{2}.$$

Par souci d'exhaustivité, on ajoute ici la démonstration par récurrence de la formule obtenue: $\forall (a,\, d) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{k=0}^{n} a + kd = (n+1)a + d\frac{n\,(n+1)}{2}$$

a) Pour $n = n_0 = 1$ on a

$$2a + d = a + (a + d) = \sum_{k=1}^{1} a + kd = (1 + 1)\, a + d\frac{(1 + 1)}{2} = 2a + d$$

c.-à-d. $P(1)$ est vraie.

b) Pour $n \geq n_0 = 1$ on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} (a + kd) = \sum_{k=0}^{n} (a + kd) + a + (n + 1)\, d &\overset{P(n)}{=} (n + 1)\, a + d\frac{n\,(n + 1)}{2} + a + (n + 1)\, d \\ &= (n + 2)\, a + d\frac{(n + 1)\,(n + 2)}{2}\end{aligned}$$

et $P(n)$ implique donc $P(n + 1)$ pour $n \geq n_0$.

Exercice 4.

i) Par un calcul direct on a pour $n \geq k \geq 1$:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\,\frac{k+n-k+1}{(n-k+1)k} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\,\frac{n+1}{(n-k+1)k} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}\,.\end{aligned}$$

ii) On démontre la formule du binôme de Newton par récurrence:

a) Pour $n = n_0 = 1$ on a

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^k y^{1-k} = \binom{1}{0} x^0 y^1 + \binom{1}{1} x^1 y^0 = x + y\ .$$

b) Pour $n \geq n_0$ on a

$$\begin{aligned}(x + y)^{n+1} &= (x + y)(x + y)^n \\ &\overset{P(n)}{=} (x + y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1}\end{aligned}$$

[décalage de +1 de l'indice de la première somme, voir le fichier "Changement d'Indice de Sommation"]

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} + \binom{n}{n} x^{n+1} + \binom{n}{0} y^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^k y^{n-k+1} + y^{n+1} + x^{n+1} \\
&\overset{(i)}{=} \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k+1} + \binom{n+1}{0} x^0 y^{n-0+1} + x^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k+1} + x^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^0 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} \, ,
\end{aligned}
$$

ce qui montre que $P(n)$ implique $P(n+1)$ pour $n \geq n_0$.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

iii) Finalement, si on pose $x = y = 1$ on trouve

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \, .$$

Exercice 5.

a) Pour $n = n_0 = 0$ on a

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0-k}{k} = \binom{0}{0} == 1 = f_1$$

Pour $n = n_1 = 1$ on a

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1-k}{k} = \binom{1}{0} + \binom{0}{1} = 1 + 0 = 1 = f_2$$

Ainsi, $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

b) Pour $n \geq n_0 = 0$ on a

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n-k}{k-1} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n-k}{k}$$

[en utilisant la formule vue à l'Exercice 4]

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{k-1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$$

[les termes de rang $n+1$ étant nuls]

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-k-1}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$$

[décalage de -1 de l'indice la première somme]

$$= f_n + f_{n+1}$$

et $P(n)$ et $P(n+1)$ impliquent donc $P(n+2)$ pour $n \geq n_0$.

Exercice 6.

i) Afin de trouver $\inf a_n$, il suffit de remarquer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En effet, $\forall n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{5\,(n+1)}{2\,(n+1)+1} - \frac{5n}{2n+1} = \frac{(5n+5)\,(2n+1) - 5n\,(2n+3)}{(2n+1)\,(2n+3)} \\ &= \frac{5}{(2n+1)\,(2n+3)} \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\inf a_n = \min a_n = a_0 = 0$.

ii) Afin de trouver $\sup A$, nous pouvons remarquer que

$$a_n = \frac{\frac{5}{2}\,(2n+1) - \frac{5}{2}}{2n+1} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2\,(2n+1)} \leq \frac{5}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et donc $a = \frac{5}{2}$ est un majorant de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il reste à montrer que $a = \frac{5}{2}$ est le plus petit des majorants, c.-à.-d. $\forall\, \varepsilon > 0$, il faut trouver n_0 tel que $a_{n_0} > a - \varepsilon$. Donc il faut trouver n_0 tel que

$$\frac{5}{2} - \frac{5}{2(2n_0+1)} > \frac{5}{2} - \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon > \frac{5}{2(2n_0+1)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{5}\varepsilon > \frac{1}{2n_0+1} \quad \Leftrightarrow \quad 2n_0 + 1 > \frac{5}{2\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow \quad n_0 > \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2\varepsilon} - 1\right).$$

Puisque le sous-ensemble des nombres naturels n'est pas majoré, on peut toujours trouver un tel $n_0 \in \mathbb{N}$. Par exemple, on peut choisir

$$n_0 = \max\left\{0, \left\lfloor \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2\varepsilon} - 1\right)\right\rfloor + 1\right\}.$$

Alors pour tout $n > n_0$ on a l'inégalité $a_n > a - \varepsilon$, ce qui montre que

$$\sup a_n = \frac{5}{2}.$$

Exercice 7.

i) On a $a_n = (n-2)^2 - 3$. Calculons les premiers termes de la suite :

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -2, \quad a_2 = -3, \quad a_3 = -2, \ \ldots$$

La suite n'est donc pas monotone car par exemple $a_1 > a_2$ et $a_2 < a_3$. Pour $n \geq 2$, on a par contre

$$a_n = (n-2)^2 - 3 \leq (n-1)^2 - 3 = a_{n+1} \ ,$$

c.-à.-d. la suite est croissante pour $n \geq 2$.
Donc on a

$$\inf a_n = \min a_n = -3 \ .$$

Pour $n \geq 2$ on a

$$a_{n+1} - a_n = (n-1)^2 - (n-2)^2 > 1,$$

alors la suite $\{a_n\}$ croît plus vite que les nombres naturels, et donc $\{a_n\}$ n'est pas majoré. Ainsi $\sup(a_n)$ et a fortiori $\max(a_n)$ n'existent pas.

ii) On a

$$a_n = \frac{n}{3n-1} = \frac{\frac{1}{3}(3n-1) + \frac{1}{3}}{3n-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3(3n-1)}$$

On procède ensuite comme dans l'exercice précédent pour montrer que la suite et décroissante:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{3(3(n+1)-1)} - \frac{1}{3(3n-1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{3n-1-(3n+2)}{(3n+2)(3n-1)}\right) \\ &= -\frac{1}{(3n+2)(3n-1)} < 0 \, \forall n \in \mathbb{N}^* \ . \end{aligned}$$

Il s'en suit que $\sup a_n = \max a_n = a_1 = \frac{1}{2}$. De plus on a vu que

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3(3n-1)} \ ,$$

donc (a_n) est minorée par $a = \frac{1}{3}$. Pour montrer que a est le plus grand minorant de (a_n), il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_{n_0} < a + \varepsilon$, où $a = \frac{1}{3}$. On écrit

$$a_{n_0} < \frac{1}{3} + \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3(3n_0 - 1)} < \frac{1}{3} + \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 3n_0 - 1 > \frac{1}{3\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad n_0 > \frac{1}{9\varepsilon} + \frac{1}{3}.$$

En prenant n_0 entier tel que

$$n_0 > \frac{1}{9\varepsilon} + \frac{1}{3} \ ,$$

on a

$$a_{n_0} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3\left(3\left(\frac{1}{9\varepsilon} + \frac{1}{3}\right) - 1\right)} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3\left(\frac{1}{3\varepsilon}\right)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{3} + \varepsilon$$

et donc

$$\inf a_n = \frac{1}{3} \ .$$

Notons encore que $\min(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'existe pas.

iii) Même question qu'en *ii*) sauf que l'on étudie ici $\{a_0 \cup (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\}$.
Comme $a_0 = 0$, on a $\min (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0 = \inf (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
De plus, la suite (a_n) perd sa monotonie puisque $a_0 < a_1$ et $a_1 > a_2$.
Enfin, l'on a toujours $\sup a_n = \max a_n = a_1 = \frac{1}{2}$.

Exercice 8.

i) En réalisant une rapide étude comme dans l'Exercice 6., nous trouvons que cette suite est strictement croissante et admet 3 comme borne supérieure.

Démontrons que 3 est la limite de la suite. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque 3 est le supremum de l'ensemble $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$0 \leq 3 - a_{n_0} \leq \varepsilon.$$

Puisque la suite est croissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N} : n \geq n_0$,

$$0 \leq 3 - a_n \leq 3 - a_{n_0} \leq \varepsilon,$$

ce qui démontre que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$. (On va voir plus tard dans le cours que toute suite croissante et majorée converge vers sa borne supérieure.)

ii) Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3 \neq 0$, par les propriétés algébriques des limites on obtient $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{3}$.

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3}{a_n} + \frac{a_n}{3}\right) = \frac{3}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} + \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{3} = 2.$