EPFL
Sections IN, SC

Anna Lachowska
26 septembre 2024

Analyse I – Corrigé de la Série 3

Exercice 1.

Q1 : FAUX.
Prendre par exemple $A = [0,1[\,\cup\,]1,2]$. La proposition serait vraie pour un intervalle.

Q2 : VRAI.
Prenons un intervalle fermé et borné $I = [a,b]$. Alors $a = \inf I$ et $b = \sup I$, ce qui est facile a vérifier à partir de la définition de inf et sup d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (voir les notes du cours). Donc on a $a = \inf I \in I$ et $b = \sup I \in I$.

Q3 : FAUX.
Prenons $A = \{\frac{1}{n},\ \ n \in \mathbb{N}^*\}$. On a bien $A \subset \mathbb{R}$ ainsi que $\sup A \in A$ et $\inf A \notin A$ mais A n'est pas un intervalle semi-ouvert, c'est un ensemble de rationnels.

Q4 : VRAI.
Par définition des bornes inférieures et supérieures, A est non vide. De plus $\sup A$ et $\inf A$ sont par définition respectivement un majorant et un minorant de A. Ainsi, en notant $M = \sup A = \inf A$ on a $\forall x \in A, M \leq x \leq M$. On en déduit que $A = \{M\}$ et donc que A est un point.

Q5 : FAUX.
Contre-exemple : $A = \{0\}$.

Q6 : FAUX.
Contre-exemple : $A = [0,1[$.

Exercice 2.

Q1 : FAUX.
$e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i\,(-1) = -i$

Q2 : VRAI.
$e^{-i\pi} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1 + i\,(0) = -1$

Q3 : FAUX.
$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i}\frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Exercice 3.

On va utiliser que pour $z = a + i\,b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} = e^a.$$

i) $|e^{i+1}| = e^1 = e$ *ii)* $\left|e^{-(i+1)}\right| = e^{-1} = \frac{1}{e}$ *iii)* $\left|e^{-(i-1)}\right| = e^1 = e$

iv) $\left|e^{(i-50)}\right| = e^{-50}$ *v)* $\left|e^{(1-50i)}\right| = e^1 = e$

vi) $|\cos(\pi/5)+i\sin(\pi/5)| = \left|e^{i\frac{\pi}{5}}\right| = 1$

Exercice 4.

Les résultats ci-après sont écrits sous la forme $z = a + i\,b$, et on a $\operatorname{Re}(z) = a$ et $\operatorname{Im}(z) = b$.
i) $z = (2-3i)(3+2i) = 12-5i$. Et donc $\operatorname{Re}(z) = 12$ et $\operatorname{Im}(z) = -5$.
ii) $z = \frac{2-3i}{3+2i} = \frac{2-3i}{3+2i}\frac{3-2i}{3-2i} = -i$. Et donc $\operatorname{Re}(z) = 0$ et $\operatorname{Im}(z) = -1$.
iii) $z = \left(\dfrac{1}{i}\right)^{19} = \dfrac{1}{i^{20}i^{-1}} = i$. Et donc $\operatorname{Re}(z) = 0$ et $\operatorname{Im}(z) = 1$.
iv) On a que $e^{-i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. D'où

$$\begin{aligned} z = (1-\sqrt{3}i)^{10} &= 2^{10}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10} = 2^{10}\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{10} \\ &= 2^{10}e^{-i\frac{10\pi}{3}} = 2^{10}e^{i\frac{2\pi}{3}} = -2^{10}e^{-i\frac{\pi}{3}} = -2^{10}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \end{aligned}$$

et ainsi $\operatorname{Re}(z) = -2^9 = -512$ et $\operatorname{Im}(z) = 512\sqrt{3}$.
v) $z = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1+2i} + \frac{1}{1+3i} = \frac{1-i}{2} + \frac{1-2i}{5} + \frac{1-3i}{10} = \frac{4}{5} - i\,\frac{6}{5}$. Et donc $\operatorname{Re}(z) = \frac{4}{5}$ et $\operatorname{Im}(z) = -\frac{6}{5}$.
vi) $z = \frac{2-3i}{2+i} + \frac{1-i}{1+3i} = \frac{(2-3i)(2-i)}{5} + \frac{(1-i)(1-3i)}{10} = -2i$. Et donc $\operatorname{Re}(z) = 0$ et $\operatorname{Im}(z) = -2$.
vii) $z = e^{6+3i} = e^6e^{3i} = e^6(\cos(3) + i\sin(3))$. Et donc $\operatorname{Re}(z) = e^6\cos(3)$ et $\operatorname{Im}(z) = e^6\sin(3)$.
viii) $z = e^{2i} + e^{3i} = \cos(2) + \cos(3) + i(\sin(2) + \sin(3))$. Et donc $\operatorname{Re}(z) = \cos(2) + \cos(3)$ et $\operatorname{Im}(z) = \sin(2) + \sin(3)$.
ix) $z = \left(e^{1-3i}\right)\left(\frac{1+i}{1-3i}\right) = e^1(\cos(3) - i\sin(3))\left(\frac{-1+2i}{5}\right)$
$= \frac{e}{5}\left(-\cos(3) + 2\sin(3) + i\left(2\cos(3) + \sin(3)\right)\right)$. Et donc $\operatorname{Re}(z) = \frac{e}{5}\left(2\sin(3) - \cos(3)\right)$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{e}{5}\left(2\cos(3) + \sin(3)\right)$.

Exercice 5.

Les résultats ci-dessous sont écrits sous la forme $z = \rho\,e^{i\phi}$, et on a $|z| = \rho$ et $\arg(z) = \phi$, défini à $2k\pi$ près avec $k \in \mathbb{Z}$.
i) $z = 2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$
ii) $z = -e^i + i\sqrt{3} = -\cos(1) + i(\sqrt{3} - \sin(1)) \Rightarrow \rho = \sqrt{\cos^2(1) + \left(\sqrt{3} - \sin(1)\right)^2}$ et comme $\operatorname{Re}(z) < 0$ alors $\phi = \pi + \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) = \pi - \arctan\left(\frac{\sqrt{3}-\sin(1)}{\cos(1)}\right)$

iii) $z = -1 + i\tan(3) = -1 + i\,\frac{\sin(3)}{\cos(3)} = \frac{1}{|\cos(3)|}\left(\cos(3) - i\,\sin(3)\right) = \frac{1}{|\cos(3)|}\,e^{-3i} = \frac{1}{|\cos(3)|}\,e^{(2\pi-3)i}$
iv) $z = \frac{8i^{21}-2i^{11}}{1-i} = \frac{8i-2i^3}{1-i} = \frac{8i+2i}{1-i} = \frac{10i}{1-i} = 10i\,\frac{1+i}{2} = 5\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$= 5\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$
v) $z = e^{\pi+i\pi} + 1 = e^\pi(-1) + 1 = 1 - e^\pi$ (nombre réel négatif). Alors $|z| = e^\pi - 1$ et $\arg(z) = \pi$.

$vi)$ $z = \sin(\pi/5) + i\cos(\pi/5) = \cos(\pi/2 - \pi/5) + i\sin(\pi/2 - \pi/5) = \cos(3\pi/10) + i\sin(3\pi/10) = e^{i\frac{3\pi}{10}}$.

Exercice 6. $i)$ On utilise que $-1 = e^{i\pi(2n+1)}$ pour $n \in [\![0,\, 4]\!]$. Les solutions recherchées sont donc $z_n = e^{i\frac{\pi}{5}(2n+1)}$ avec $n \in [\![0,\, 4]\!]$. Ainsi on a $|z_n| = 1$ et $Arg(z_n) = \frac{\pi}{5}(2n+1)$. (voir Fig. 1a).

$ii)$ Méthode 1: On a $-3 - 3i = 3(-1 - i) = 3\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$. Alors on considère l'équation

$$z^2 = 3\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i + 2\pi n i}$$

où $n = 0, 1$. On obtient $z_1 = \sqrt{3\sqrt{2}}e^{-\frac{3\pi}{8}i}$ et $z_2 = \sqrt{3\sqrt{2}}e^{\frac{5\pi}{8}i}$. (voir Fig. 1b).
Méthode 2, fastidieuse : En écrivant $z = a + i\,b$, l'équation donnée devient $a^2 - b^2 + 2ab\,i = -3 - 3i$. Puisque a et b sont réels, on doit résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ \quad 2ab = -3 \end{cases}$$

La deuxième équation implique que a et b sont non-nuls et donc $b = -\frac{3}{2a}$. En insérant ceci dans la première équation on obtient

$$a^2 - \left(-\frac{3}{2a}\right)^2 = -3 \quad \Leftrightarrow \quad 4a^4 + 12a^2 - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = \frac{-12 \pm 12\sqrt{2}}{8} = \begin{cases} \frac{3}{2}(-1 - \sqrt{2}) \\ \frac{3}{2}(-1 + \sqrt{2}) \end{cases}$$

Puisque $a \in \mathbb{R}$, seulement la seconde solution est possible; on a donc $a = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{-1 + \sqrt{2}}$ et $b = \pm(-1)\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{-1+\sqrt{2}}}$. Ainsi les solutions de l'équation initiale sont $z_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{-1 + \sqrt{2}} - i\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{-1+\sqrt{2}}}$ et $z_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{-1 + \sqrt{2}} + i\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{-1+\sqrt{2}}}$, les mêmes qu'on a obtenues par Méthode 1.

$iii)$ L'argument du nombre $w = 5 + 2\sqrt{6}i$ satisfait $\tan(\varphi) = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, ce qui n'est pas une valeur de tangente d'un angle remarquable. On utilise donc la forme cartésienne de $z = a + ib$ et on cherche les nombres réels a, b. Comme dans $ii)$ on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ \quad 2ab = 2\sqrt{6} \end{cases}$$

La deuxième équation implique que a et b sont non-nuls et donc $b = \frac{\sqrt{6}}{a}$. En insérant ceci dans la première équation on obtient

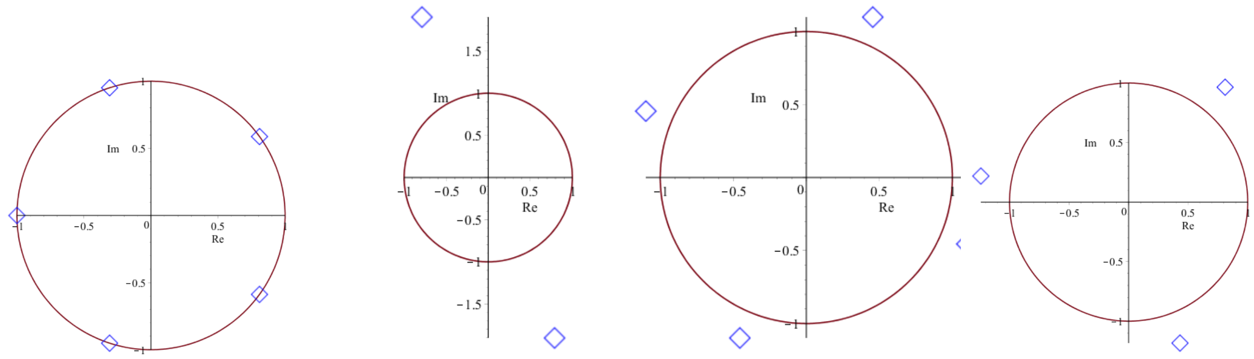
$$a^2 - \frac{6}{a^2} - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^4 - 5a^2 - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow a^2 = \frac{5 \pm 7}{2}.$$

Puisque $a \in \mathbb{R}$, seulement la solution avec le "+" est possible, donc on $a = \pm\sqrt{6}$ et $b = \pm 1$. Ainsi les solutions de l'équation initiale sont $z_1 = \sqrt{6} + i$ et $z_2 = -\sqrt{6} - i$. On vérifie facilement que $z_1^2 = z_2^2 = 5 + 2\sqrt{6}i$.

Remarque: Exemple $iii)$ montre que pour calculer la racine *carrée* d'un nombre complexe il est parfois avantageux d'utiliser la forme cartésienne, surtout si l'argument ne s'exprime pas facilement en fractions de π. Dans le cas $iii)$ on a obtenu le résultat simple en forme cartésienne; par contre la forme polaire contiendrait l'argument $\frac{1}{2}\arctan(\frac{2\sqrt{6}}{5})$. Cependant, en général, la forme polaire exponentielle est préférable pour calculer les racines, en particulier pour les racines d'ordre ≥ 3.

$iv)$ On utilise que $-i = e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)}$ pour $n \in [\![0,\,3]\!]$. Les solutions recherchées sont donc $z_{n+1} = \sqrt[4]{2}\, e^{i\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n\right)}$ avec $n \in [\![0,\,3]\!]$. Ainsi on a $|z_n| = \sqrt[4]{2}$ et $Arg(z_n) = \frac{3\pi}{8} + n\frac{\pi}{2}$. (voir Fig. 1c).

$v)$ On a que $-\sqrt{3}+i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right) = 2\, e^{i\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)}$ pour $n \in [\![0,\,2]\!]$. Les solutions recherchées sont donc $z_{n+1} = \sqrt[3]{2}\, e^{i\left(\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}n\right)}$ avec $n \in [\![0,\,2]\!]$. Ainsi on a $|z_n| = \sqrt[3]{2}$ et $Arg(z_n) = \frac{5\pi}{18} + \frac{2n\pi}{3}$. (voir Fig. 1d).



(a) (b) (c) (d)

Figure 1:

Exercice 7.

$i)$ On pose $z = a + i\,b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ qu'on met dans l'équation donnée :

$$(a+i\,b)^2 + 6(a+i\,b) + 12 - 4i = 0,$$

d'où le système d'équations

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 6a + 12 = 0 \\ \quad 2ab + 6b - 4 = 0\,. \end{cases}$$

De la première équation on obtient

$$a = -3 \pm \sqrt{b^2-3}\,,$$

et donc $|b| \geq \sqrt{3}$ car a doit être réel. On peut alors récrire la deuxième équation du système comme

$$a = \frac{2}{b} - 3$$

et on trouve

$$-3 \pm \sqrt{b^2-3} = \frac{2}{b} - 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad \pm\sqrt{b^2-3} = \frac{2}{b}\,,$$

d'où

$$b^2 - 3 = \frac{4}{b^2}\,,$$

ou encore

$$(b^2)^2 - 3b^2 - 4 = (b^2-4)(b^2+1) = 0.$$

On a alors $b = \pm 2$ car b doit être réel. Les solutions de l'équation initiale sont donc

$$z_1 = -2 + 2i$$
$$z_2 = -4 - 2i.$$

ii) Posons $X = z^3$.
Il nous faut alors résoudre $X^2 + 4X + 2 = 0$. Ce qui conduit à $X = 2\left(-1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

- Méthode 1 : Courte et élégante
  Écrivons $X = r\,e^{i\theta}$ où $r = 2\left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\theta = \pi$.
  Nous cherchons alors à résoudre l'équation $z^3 = X$.
  En posant $z = r'\,e^{i\theta'}$. En opérant comme dans l'exercice 6.i), 6.iii) ou 6.iv), on trouve que $r' = \sqrt[3]{2\left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ et $\theta' \in \{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\}$,
- Méthode 2 : fastidieuse :
  Résolvons maintenant $z^3 = 2\left(-1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$:
  En posant $z = a + ib$ où $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$, on obtient $z^3 = a^3 - 3ab^2 + i\,(3a^2b - b^3)$.
  Cela nous mène directement au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = 2\left(-1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ b(3a^2 - b^2) = 0 \end{cases}$$

  $b = 0$:
  Alors $a = -\sqrt[3]{2\left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$. Ce qui nous fait 2 solutions pour ce cas.
  $b^2 = 3a^2$:
  Alors $-8a^3 = 2\left(-1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et donc $a = \sqrt[3]{\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{2}}{8}}$. Notons que les nombres $\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{2}}{8}$ sont positifs.
  Finalement $b = \pm\sqrt{3}\,\sqrt[3]{\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{2}}{8}}$. Ce qui nous fait 4 solutions pour ce cas.
  Nous avons bien trouvé nos 6 solutions.

Exercice 8.

Comme $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, on a

$$1 + \sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{2}} = 1 + i\sqrt{3}\,,$$

qu'on récrit sous forme polaire :

$$1 + i\sqrt{3} = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}\,.$$

Ainsi l'équation devient

$$z^2 = \left(2\,e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^8 = 2^8\,e^{i\frac{8\pi}{3}} = 2^8\,e^{i\frac{2\pi}{3}}\,.$$

Afin de résoudre cette équation, on écrit

$$z^2 = 2^8\,e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)}, \qquad \text{avec } n = 0,\, 1\,,$$

car une équation polynomiale du deuxième degré a deux solutions. Ces solutions sont donc

$$z_1 = 2^4\, e^{i\frac{\pi}{3}} = 16\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8 + i\,8\sqrt{3}\,,$$
$$z_2 = 2^4\, e^{i\frac{4\pi}{3}} = 16\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8 - i\,8\sqrt{3}\,.$$

Les quantités recherchées sont alors

$$\begin{array}{llll} \mathrm{Re}(z_1) = 8, & \mathrm{Im}(z_1) = 8\sqrt{3}, & |z_1| = 16, & \arg(z_1) = \frac{\pi}{3}\,, \\ \mathrm{Re}(z_2) = -8, & \mathrm{Im}(z_2) = -8\sqrt{3}, & |z_2| = 16, & \arg(z_2) = \frac{4\pi}{3}\,. \end{array}$$

Exercice 9.

Il nous faut ici trouver les racines du polynôme $z^6 = -8$.
Posons $z = r\,e^{i\theta}$. Puisque $-8 = 8e^{-i\pi}$, alors $r = \sqrt[6]{8}$ et $\theta = \frac{\pi}{6}(1+2n)$ où $n \in [\![0,\, 5]\!]$.
Ainsi, $z^6+8 = (z-\sqrt[6]{8}e^{i\,\frac{\pi}{6}})(z-\sqrt[6]{8}e^{-i\,\frac{\pi}{6}})(z-\sqrt[6]{8}e^{i\,\frac{3\pi}{6}})(z-\sqrt[6]{8}e^{-i\,\frac{3\pi}{6}})(z-\sqrt[6]{8}e^{i\,\frac{5\pi}{6}})(z-\sqrt[6]{8}e^{-i\,\frac{5\pi}{6}})$.
Afin de décomposer ce polynôme en produit de facteurs irréductibles réels, il suffit de regrouper deux à deux les racines complexes conjuguées. En remarquant que $(z - r\,e^{i\theta})(z - r\,e^{-i\theta}) = z^2 - 2r\,\cos(\theta)z + r^2$, on trouve que
$z^6 + 8 = (z^2 - \sqrt{6}z + 2)(z^2 + 2)(z^2 + \sqrt{6}z + 2)$

Exercice 10.

Pour caractériser l'ensemble $\left\{z \in \mathbb{C}\colon\ z \neq 0,\ z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}\right\}$, on pose $z = \rho\,e^{i\phi}$ avec $\rho > 0$ et $\phi \in [0, 2\pi[$. La condition devient alors

$$\rho\,e^{i\phi} + \frac{1}{\rho}\,e^{-i\phi} \in \mathbb{R}\ ,$$

ou

$$\mathrm{Im}\left(\rho\,e^{i\phi} + \frac{1}{\rho}\,e^{-i\phi}\right) = \rho\sin(\phi) - \frac{1}{\rho}\sin(\phi) = 0\ .$$

Cette condition est satisfaite pour $\phi = 0$, $\phi = \pi$, ou $\rho = 1$ et ϕ arbitraire, donc pour les nombres de forme $z = \rho$, $z = -\rho$ et les nombres complexes de module égal à 1. L'ensemble $\{z \in \mathbb{C}\colon\ z \neq 0 \text{ et } \mathrm{Im}(z) = 0,\ \text{ ou } |z| = 1\}$ contient non seulement les nombres complexes z de module 1, mais aussi les nombres réels non-nuls qui correspondent aux nombres de la forme $z = \rho$ et $z = -\rho$ avec $\rho > 0$.

Exercice 11.

Q1 : VRAI.
Noter que $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$. Comme $i^6 + 3i^4 + i^2 - 1 = -1 + 3 - 1 - 1 = 0\,$, $z - i$ divise le polynôme donné. Puisque ce dernier est à coefficients réels, il suit que $\bar{i} = -i$ en est aussi une racine et donc $z + i$ le divise aussi. Ainsi on conclut que $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$ divise ce polynôme donné.
Sinon, on peut aussi faire une division polynomiale pour obtenir que $z^6+3z^4+z^2-1 = (z^2 + 1)(z^4 + 2z^2 - 1)$.

Q2 : VRAI.

Comme $z_1, \ldots, z_n$ sont racines du polynôme, on a

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n).$$

En comparant les termes de degré zéro des deux côtés de l'expression, on trouve la formule de l'énoncé.

Q3 : VRAI.

L'astuce ici est de factoriser le terme dans la parenthèse par 4.

On trouve alors que $(2 + 2i\sqrt{3})^n = 2^{2n}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$. On reconnaît alors les cosinus et sinus de $\frac{\pi}{3}$. Ainsi, on a $(2 + 2i\sqrt{3})^n = 2^{2n}e^{in\frac{\pi}{3}}$. Cette expression est réelle $\Leftrightarrow \frac{n\pi}{3} = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ et donc pour tout $n = 3k$. $(2 + 2i\sqrt{3})^n$ est donc réel pour par exemple $n = 3$.