Anna Lachowska
19 décembre 2024

Analyse I – Corrigé de la Série 14

Exercice 1.

On utilise la formule d'intégration par parties :

$$\int g(x)\, f'(x)\, dx = g(x)f(x) - \int f(x)\, g'(x)\, dx$$

i) Par intégration par parties d'abord avec $f'(x) = \cos(x)$ [$\Rightarrow f(x) = \sin(x)$], $g(x) = x^2$ [$\Rightarrow g'(x) = 2x$] et puis avec $f'(x) = \sin(x)$ [$\Rightarrow f(x) = -\cos(x)$], $g(x) = x$ [$\Rightarrow g'(x) = 1$], il vient

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos(x)\, dx &= \sin(x)\, x^2 - 2\int \sin(x)\, x\, dx = \sin(x)\, x^2 - 2\left(-\cos(x)\, x + \int \cos(x)\, dx\right) \\ &= \left(x^2 - 2\right)\sin(x) + 2x\cos(x) + c\end{aligned}$$

ii) Posons $I_{a,b} = \displaystyle\int e^{ax}\cos(bx)\, dx$ et intégrons deux fois par parties avec $f'(x) = e^{ax}$ [$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{a}\, e^{ax}$] ainsi que $g(x) = \cos(bx)$ [$\Rightarrow g'(x) = -b\sin(bx)$] :

$$I_{a,b} = \frac{1}{a}\, e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin(bx)\, dx$$

Cette dernière intégrale doit aussi être intégrée par parties avec $f'(x) = e^{ax}$ et $g(x) = \sin(bx)$ [$\Rightarrow g'(x) = b\cos(bx)$]

$$\int e^{ax}\sin(bx)\, dx = \frac{1}{a}\, e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\, dx$$

On remarque alors que l'intégrale à droite est $I_{a,b}$. Ainsi on peut combiner les deux équations précédentes et isoler $I_{a,b}$. On obtient

$$I_{a,b} = \frac{1}{a}\, e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}\, e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\, I_{a,b}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) I_{a,b} = \frac{e^{ax}}{a}\left(\cos(bx) + \frac{b}{a}\sin(bx)\right)$$

et donc

$$I_{a,b} = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\Big(a\cos(bx) + b\sin(bx)\Big) + c, \quad \text{où } c \in \mathbb{R} \text{ est une constante.}$$

iii) Posons $g(x) = \arctan(x)$ ($\Longrightarrow g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$) et $f'(x) = 1$ ($\Longrightarrow f(x) = x$).
Par intégration par parties on obtient donc

$$\int \arctan(x)\, dx = x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

Or

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

Soit

$$\int \arctan(x)\,dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

iv) Posons $g(x) = x$ ($\Longrightarrow g'(x) = 1$) et $f'(x) = 2^{-x} = e^{-x\ln(2)}$ ($\Longrightarrow f(x) = -\dfrac{e^{-x\ln(2)}}{\ln(2)}$).

Par intégration par parties on obtient donc

$$\int x2^{-x}\,dx = -\frac{xe^{-x\ln(2)}}{\ln(2)} + \frac{1}{\ln(2)}\int e^{-x\ln(2)}\,dx$$

Or

$$\begin{aligned}\int e^{-x\ln(2)}\,dx &= -\frac{e^{-x\ln(2)}}{\ln(2)} + C \text{ où } C \in \mathbb{R}\\ &= -\frac{2^{-x}}{\ln(2)} + C\end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned}\int x2^{-x}\,dx &= -\frac{x2^{-x}}{\ln(2)} - \frac{2^{-x}}{\ln^2(2)} + C\\ &= -\frac{2^{-x}}{\ln(2)}\left(x + \frac{1}{\ln(2)}\right) + C\end{aligned}$$

v) Posons $g(x) = x$ ($\Longrightarrow g'(x) = 1$) et $f'(x) = \dfrac{1}{\sin^2(x)}$ ($\Longrightarrow f(x) = -\cot(x)$)

Par intégration par parties on obtient :

$$\int \frac{x}{\sin^2(x)}\,dx = -x\cot(x) + \int \cot(x)\,dx = -x\cot(x) + \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx =$$

$$= -x\cot(x) + \int \frac{du}{u} = -x\cot(x) + \ln|u| + C = -x\cot(x) + \ln|\sin(x)| + C,$$

où on a utilisé le changement de variables $u = \sin(x)$ ($\Longrightarrow du = \cos(x)dx$).

vi) Posons $g(x) = \ln(x)$ ($\Longrightarrow g'(x) = \dfrac{1}{x}$) et $f'(x) = \dfrac{1}{x^3}$ ($\Longrightarrow f(x) = -\dfrac{1}{2x^2}$)

Par intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(x)}{x^3}\,dx &= -\frac{\ln(x)}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3}\\ &= -\frac{\ln(x)}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C \text{ où } C \in \mathbb{R}\\ &= -\frac{1}{2x^2}\left(\ln(x) + \frac{1}{2}\right) + C\end{aligned}$$

vii) Posons le changement de variable $t = \sqrt{x}$ et donc $dx = 2tdt$. L'intégrale à calculer se transforme donc comme suit :

$$\int e^{\sqrt{x}}\, dx = 2 \int te^t\, dt$$

Posons $g(t) = t$ ($\implies g'(t) = 1$) et $f'(t) = e^t$ ($\implies f(t) = e^t$).
Par intégration par parties on obtient :

$$2 \int te^t\, dt = 2\left(te^t - \int e^t\, dt\right) = 2te^t - 2e^t + C \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

Et donc

$$\int e^{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$$

viii) Nous allons ici effectuer 2 intégrations par parties mais avec des fonctions différentes.
Pour la première, posons $g(x) = \sin(\ln(x))$ ($\implies g'(x) = \dfrac{\cos(\ln(x))}{x}$) et $f'(x) = 1$ ($\implies f(x) = x$).
Par intégration par parties on obtient :

$$\int \sin(\ln(x))\, dx = x\sin(\ln(x)) - \int \cos(\ln(x))\, dx$$

De même, posons $g(x) = \cos(\ln(x))$ ($\implies g'(x) = \dfrac{\sin(\ln(x))}{x}$) et $f'(x) = 1$ ($\implies f(x) = x$).
Et ainsi l'intégration par parties sur notre nouvelle intégrale donne

$$\int \cos(\ln(x))\, dx = x\cos(\ln(x)) + \int \sin(\ln(x))\, dx$$

Ainsi, si l'on note par $\mathcal{I} = \displaystyle\int \sin(\ln(x))\, dx$, nous avons que

$$\mathcal{I} = x\sin(\ln(x)) - x\cos(\ln(x)) - \mathcal{I}$$

Et donc

$$\int \sin(\ln(x))\, dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x)))$$

ix) Posons $g(x) = x^2$ ($\implies g'(x) = 2x$) et $f'(x) = xe^{-x^2}$ ($\implies f(x) = -\dfrac{e^{-x^2}}{2}$).
Par intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned}\int x^3 e^{-x^2}\, dx &= -\frac{x^2e^{-x^2}}{2} + \int xe^{-x^2}\, dx = -\frac{x^2e^{-x^2}}{2} - \frac{e^{-x^2}}{2} + C \text{ où } C \in \mathbb{R} \\ &= -\frac{e^{-x^2}}{2}(1 + x^2) + C\end{aligned}$$

x) Tout d'abord, utilisons la formule $cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ afin de linéariser $\sin^2(x)$ en $\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$. Puis, observons que $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$.

Ainsi, l'intégrale se transforme comme suit :

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^2(x)}{e^x}\,dx &= \int \frac{1-\cos(2x)}{2}e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{-x}\,dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)e^{-x}\,dx \\ &= -\frac{e^{-x}}{2} - \frac{1}{2}\int \cos(2x)e^{-x}\,dx\end{aligned}$$

Posons $\mathcal{I} = \displaystyle\int \cos(2x)e^{-x}\,dx$. Alors d'après (ii) on a $\mathcal{I} = I_{a,b}$ avec $a=-1$ et $b=2$, et donc

$$\mathcal{I} = \frac{e^{-x}(2\sin(2x)-\cos(2x))}{5} + C$$

Et donc

$$\int \frac{\sin^2(x)}{e^x}\,dx = -\frac{e^{-x}}{2}\left(1+\frac{2\sin(2x)-\cos(2x)}{5}\right) + C$$

Exercice 2.

$i)$ Posons $I_n = \displaystyle\int x^n \sin(2x)\,dx$. Alors $I_0 = -\frac{1}{2}\cos(2x)+c$ et

$$I_1 = -\frac{1}{2}x\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + c \quad \text{(par parties avec } f'(x)=\sin(2x) \text{ et } g(x)=x\text{)}$$

et si $n \geq 2$ (encore deux fois par parties),

$$\begin{aligned}I_n = \int x^n \sin(2x)\,dx &\overset{(1)}{=} -\frac{1}{2}x^n\cos(2x) + \frac{1}{2}n\int x^{n-1}\cos(2x)\,dx \\ &\overset{(2)}{=} -\frac{1}{2}x^n\cos(2x) + \frac{n}{2}\left[\frac{1}{2}x^{n-1}\sin(2x) - \frac{1}{2}(n-1)\int x^{n-2}\sin(2x)\,dx\right] \\ &= \frac{x^{n-1}}{4}\left(n\sin(2x) - 2x\cos(2x)\right) - \frac{n(n-1)}{4}\,I_{n-2},\end{aligned}$$

où (1): $f'(x)=\sin(2x)$ et $g(x)=x^n$ et (2): $f'(x)=\cos(2x)$ et $g(x)=x^{n-1}$.

$ii)$ Posons $I_n = \displaystyle\int \ln^n(x)\,dx$. Alors $I_0 = x+c$. Pour $n \geq 1$ on intègre par parties avec $f'(x)=1$ et $g(x)=\ln^n(x)$:

$$I_n = \int 1\cdot\ln^n(x)\,dx = x\ln^n(x) - n\int x\ln^{n-1}(x)\frac{1}{x}\,dx = x\ln^n(x) - nI_{n-1}.$$

Exercice 3.

$i)$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

Et donc

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

ii)

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

Et donc

$$\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1}\,dx = 2\ln|x-2| - \ln|x-1| + C$$

iii)

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}\,dx$$

Posons $y = \dfrac{x+1}{2}$. Alors $dx = 2dy$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\arctan(y) + C \text{ où } C \in \mathbb{R}\\ &= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+2x}\,dx = \int \frac{1}{x(x+2)}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right| + C \text{ où } C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

v)

$$\frac{3x-2}{x^2-4x+5} = \frac{\frac{3}{2}(2x-4)}{x^2-4x+5} + \frac{4}{x^2-4x+5} = \frac{3}{2}\frac{2x-4}{x^2-4x+5} + \frac{4}{1+(x-2)^2}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx &= \int \left(\frac{3}{2}\frac{2x-4}{x^2-4x+5} + \frac{4}{1+(x-2)^2}\right)dx\\ &= \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2-4x+5)}{x^2-4x+5} + 4\int \frac{d(x-2)}{1+(x-2)^2}\\ &= \frac{3}{2}\ln|x^2-4x+5| + 4\arctan(x-2) + C \text{ où } C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Ici, le terme $4\arctan(x-2)$ est obtenu en effectuant le même type de changement de variable qu'en *iii)*.

vi) La décomposition en éléments simples est

$$\frac{x^2-2}{x^3-x^2} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x-1}, \qquad \text{avec} \qquad \alpha = 2, \quad \beta = 2, \quad \gamma = -1.$$

On obtient donc

$$\int \frac{x^2-2}{x^3-x^2}\,dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x-1}\right)dx = 2\ln(|x|) - \ln(|x-1|) - \frac{2}{x} + c.$$

vii) La décomposition en éléments simples est

$$\frac{4x}{x^4-1} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma x+\delta}{x^2+1}, \qquad \text{avec} \qquad \alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -2, \quad \delta = 0,$$

d'où

$$\int \frac{4x}{x^4-1}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1}\right) dx = \ln\left(\frac{|x^2-1|}{x^2+1}\right) + c.$$

Exercice 4.

(*i*) On cherche a tel que $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{x}\,dx = 1$.

Or,

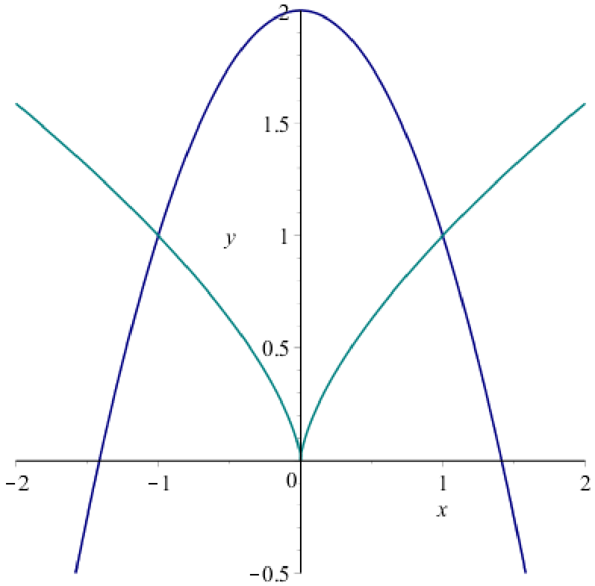
$$\int_1^a \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)|_1^a = \ln(a) - \ln(1) = \ln(a)$$

Et donc

$$\ln(a) = 1 \Leftrightarrow a = e$$

Remarque. C'est une des possibles façons de définir le nombre e.

(*ii*) D'abord, traçons les différentes fonctions :



Il est facile à voir à partir des propriétés des fonction élémentaires que les fonctions $f(x) = 2 - x^2$ et $g(x) = x^{2/3}$ sont toutes les deux paires, et que pour $x > 0$ il existe un seul point d'intersection, notamment $x = 1$. Autrement, on peut résoudre l'équation $2 - x^2 = x^{2/3}$ qui implique

$$(x^2-1) + (x^{2/3}-1) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (x^{2/3}-1)(x^{4/3}+x^{2/3}+1) + (x^{2/3}-1) = 0$$

$$(x^{1/3}-1)(x^{1/3}+1)(2+x^{2/3}+x^{4/3}) = 0,$$

avec les deux solutions reélles $x = \pm 1$.

On obtient $x = \pm 1$ pour les bornes d'intégration de x.

On remarque également que l'aire que l'on doit calculer est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 0$, ainsi, il nous suffit de calculer l'intégrale pour x variant de 0 à 1 et de multiplier le résultat par 2 grâce à l'argument de symétrie.

$$2\int_0^1 (2-x^2) - x^{\frac{2}{3}}\,dx = 2\left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5}\right]_0^1 = 2\left(2 - \frac{1}{3} - \frac{3}{5}\right) = \frac{32}{15}$$

Exercice 5.

i) Nous avons ici une intégrale de type 1. Pour $p \neq 1$ posons

$$\mathcal{I}_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^p}\,dx$$

On a pour $p \neq 1$:

$$\mathcal{I}_\varepsilon = \left[\frac{1}{1-p}\frac{1}{x^{p-1}}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-p}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{p-1}}\right)$$

Si $p - 1 < 0$, on a $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^{p-1}} = 0$.
Et donc

$$\mathcal{I} = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon = \frac{1}{1-p}$$

Si $p - 1 > 0$ la limite n'existe pas et l'intégral est divergente.
Si $p = 1$, on a

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \ln(1) - \ln(\varepsilon) = -\ln(\varepsilon).$$

Or $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \ln(\varepsilon) = -\infty$, et l'intégral est divergente.
Finalement, l'intégral est convergente si et seulement si $p < 1$.

ii) Nous avons ici une intégrale de type 2.
Posons

$$\mathcal{I}_R = \int_1^R \frac{1}{x^p}\,dx$$

On a pour $p \neq 1$:

$$\mathcal{I}_R = \left[\frac{1}{1-p}\frac{1}{x^{p-1}}\right]_1^R = \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{R^{p-1}}\right)$$

Si $p - 1 > 0$ on a $\lim\limits_{R\to+\infty} \frac{1}{R^{p-1}} = 0$.
Et donc

$$\mathcal{I} = \lim_{R\to+\infty} \mathcal{I}_R = \frac{1}{p-1}$$

Si $p - 1 < 0$, la limite n'existe pas et l'intégral est divergente.
Si $p = 1$ on a

$$\int_1^R \frac{1}{x}\,dx = \ln(R) - \ln(1) = \ln(R).$$

Or $\lim\limits_{R\to\infty} \ln(R) = \infty$, et l'intégral est divergente.
Finalement, l'intégral est convergente si et seulement si $p > 1$.

iii) Nous avons ici une intégrale de type 1.
Posons

$$\mathcal{I}_{1-\varepsilon} = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = [\arcsin(x)]_0^{1-\varepsilon} = \arcsin(1-\varepsilon)$$

Et donc

$$\mathcal{I} = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}_{1-\varepsilon} = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

Car la fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ est continue sur $[-1, 1]$.

iv) Posons

$$\mathcal{I}\varepsilon = \int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \ln(x)}\, dx$$

Opérons le changement de variable suivant : $t = \ln(x)$ et donc $dt = \dfrac{1}{x} dx$. $x = \varepsilon \implies t = \ln(\varepsilon)$ et $x = \dfrac{1}{2} \implies t = -\ln(2)$.
Ainsi,

$$\mathcal{I}\varepsilon = \int_{\ln(\varepsilon)}^{-\ln(2)} \frac{1}{t}\, dt = [\ln|t|]_{\ln(\varepsilon)}^{-\ln(2)} = \ln(\ln(2)) - \ln|\ln(\varepsilon)|$$

Or

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \ln|\ln(\varepsilon)| = +\infty$$

Donc $\mathcal{I}$ est une intégrale divergente.

v) C'est une intégrale généralisée de type 2 qui est définie par la limite

$$I = \int_e^\infty \frac{\ln^2(x)}{x^2}\, dx = \lim_{R \to \infty} \int_e^R \frac{\ln^2(x)}{x^2}\, dx\,.$$

On intègre dans l'intégrale de droite par parties avec $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ $[\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x}]$ et $g(x) = \ln^2(x)$ $[\Rightarrow g'(x) = 2\ln(x)\frac{1}{x}]$

$$\begin{aligned}\int_e^R \frac{\ln^2(x)}{x^2}\, dx &= \left[-\frac{1}{x}\ln^2(x)\right]_e^R - \int_e^R \left(-\frac{1}{x}\right)\frac{2\ln(x)}{x}\, dx \\ &= -\frac{1}{R}\ln^2(R) + \frac{1}{e} + \int_e^R \frac{2\ln(x)}{x^2}\, dx\end{aligned}$$

On intègre par partie encore une fois avec $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ $[\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x}]$ et $g(x) = 2\ln(x)$ $[\Rightarrow g'(x) = \frac{2}{x}]$

$$\begin{aligned}\int_e^R \frac{2\ln(x)}{x^2}\, dx &= \left[-\frac{2}{x}\ln(x)\right]_e^R - \int_e^R \left(-\frac{1}{x}\right)\frac{2}{x}\, dx \\ &= -\frac{2}{R}\ln(R) + \frac{2}{e} + \int_e^R \frac{2}{x^2}\, dx \\ &= -\frac{2}{R}\ln(R) + \frac{2}{e} - \frac{2}{R} + \frac{2}{e}\,.\end{aligned}$$

Pour l'intégrale généralisée I on trouve donc

$$\begin{aligned}I = \lim_{R \to \infty} \int_e^R \frac{\ln^2(x)}{x^2}\, dx &= \lim_{R \to \infty} \left(-\frac{1}{R}\ln^2(R) + \frac{1}{e} - \frac{2}{R}\ln(R) + \frac{2}{e} - \frac{2}{R} + \frac{2}{e}\right) \\ &= \frac{5}{e}\,,\end{aligned}$$

où on a utilisé Bernoulli-l'Hospital pour calculer les limites

$$\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{R}\ln(R)\right) = -\lim_{R\to\infty}\frac{\ln(R)}{R} = -\lim_{R\to\infty}\frac{\frac{1}{R}}{1} = -\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R} = 0\,.$$

et

$$\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{R}\ln^2(R)\right) = -\lim_{R\to\infty}\frac{2\ln(R)\frac{1}{R}}{1} = -\lim_{R\to\infty}\frac{2\ln(R)}{R} = 0.$$

vi) C'est une intégrale généralisée de type 1 qui s'écrit

$$I = \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{\delta\to 0}\int_{1+\delta}^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx\,.$$

Pour calculer l'intégrale à droite, on pose le changement de variable $x = \varphi(u) = u^2+1$, $\varphi'(u) = 2u$ et on écrit $\delta = \varepsilon^2$ avec $\varepsilon > 0$ pour simplifier la notation. Comme x varie entre $1+\varepsilon^2 = \varphi(\varepsilon)$ et $2 = \varphi(1)$, on a

$$\begin{aligned} I = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon^2}^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^1 \frac{\varphi(u)}{\sqrt{\varphi(u)-1}}\,\varphi'(u)\,du \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^1 \frac{u^2+1}{\sqrt{u^2}}\,2u\,du = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^1 2(u^2+1)\,du \\ &= 2\int_0^1 (u^2+1)\,du \\ &= 2\left[\frac{1}{3}u^3+u\right]_0^1 = 2\cdot\frac{4}{3} = \frac{8}{3}\,. \end{aligned}$$

Notez qu'on a pu enlever la limite parce que l'expression en u est (dans ce cas, pas de manière générale) bien définie aux nouvelles bornes.

vii) Il s'agit d'une intégrale généralisée de type 2 qui est définie par la limite

$$I = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \sin(x)\,e^{-x}\,dx\,.$$

On intègre par parties avec $f'(x) = e^{-x}$ $[\Rightarrow f(x) = -e^{-x}]$ et $g(x) = \sin(x)$ $[\Rightarrow g'(x) = \cos(x)]$. On obtient

$$\begin{aligned} I = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \sin(x)\,e^{-x}\,dx &= \lim_{R\to\infty}\Big[-\sin(x)\,e^{-x}\Big]_0^R + \lim_{R\to\infty}\int_0^R \cos(x)\,e^{-x}\,dx \\ &= \lim_{R\to\infty}\big(-\sin(R)\,e^{-R}\big) + \lim_{R\to\infty}\int_0^R \cos(x)\,e^{-x}\,dx \\ &= \lim_{R\to\infty}\int_0^R \cos(x)\,e^{-x}\,dx \end{aligned}$$

car $\lim_{R\to\infty}\big(\sin(R)\,e^{-R}\big) = 0$. En effet, on a $\lim_{R\to\infty} e^{-R} = 0$ et $-1 \le \sin(R) \le 1$, ce qui permet de conclure par le théorème des deux gendarmes.

On intègre une deuxième fois par parties avec $f'(x) = e^{-x}$ et $g(x) = \cos(x)$ $[\Rightarrow g'(x) = -\sin(x)]$ pour obtenir

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R\to\infty}\Big[-\cos(x)\,e^{-x}\Big]_0^R - \lim_{R\to\infty}\int_0^R \sin(x)\,e^{-x}\,dx \\ &= \lim_{R\to\infty}\big(-\cos(R)\,e^{-R}+1\big) - I \\ &= 1 - I \end{aligned}$$

car $\lim_{R\to\infty}\big(-\cos(R)\,e^{-R}\big) = 0$ (conclusion par le théorème des deux gendarmes comme ci-dessus).

On a donc $I = 1 - I$, ou

$$I = \frac{1}{2}\,.$$

viii) Cette intégrale de type 3 est définie par la limite

$$I = \lim_{R\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0} I_{\varepsilon,R}$$

avec

$$I_{\varepsilon,R} = \int_\varepsilon^R e^{-x}(1-x)\ln(x)\,dx\,.$$

On intègre par parties avec $f'(x) = e^{-x}(1-x)$ et $g(x) = \ln(x)$ $[\Rightarrow\ g'(x) = \frac{1}{x}]$. Pour trouver $f(x)$ qui est une primitive de $f'(x)$, on intègre aussi par parties avec $u'(x) = e^{-x}$ $[\Rightarrow\ u(x) = -e^{-x}]$ et $v(x) = 1-x$ $[\Rightarrow\ v'(x) = -1]$. Ainsi on obtient

$$f(x) = \int e^{-x}(1-x)\,dx = -e^{-x}(1-x) - \int (-e^{-x})(-1)\,dx = x\,e^{-x}\,.$$

On a donc

$$\begin{aligned}I_{\varepsilon,R} &= \Big[x\,e^{-x}\ln(x)\Big]_\varepsilon^R - \int_\varepsilon^R x\,e^{-x}\,\frac{1}{x}\,dx = R\,e^{-R}\ln(R) - \varepsilon\,e^{-\varepsilon}\ln(\varepsilon) - \int_\varepsilon^R e^{-x}\,dx\\ &= R\,e^{-R}\ln(R) - \varepsilon\,e^{-\varepsilon}\ln(\varepsilon) - \Big[-e^{-x}\Big]_\varepsilon^R = R\,e^{-R}\ln(R) - \varepsilon\,e^{-\varepsilon}\ln(\varepsilon) + e^{-R} - e^{-\varepsilon}\,.\end{aligned}$$

Puisque $\lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon\ln(\varepsilon)) = 0$ (Bernoulli-l'Hospital) on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{\varepsilon,R} = R\,e^{-R}\ln(R) + e^{-R} - 1$$

et puisque

$$\lim_{R\to\infty} R\,e^{-R}\ln(R) = \lim_{R\to\infty}\frac{R\ln(R)}{e^R} = 0$$

par Bernoulli-l'Hospital, on a finalement

$$I = \lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0} I_{\varepsilon,R} = -1\,.$$

Exercice 6.

Soit la fonction $f\colon [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $y = f(x) = \sqrt{x^2-1}$. L'aire cherchée est alors

$$t = xy - 2\int_1^x f(w)\,dw = xy - 2\int_1^x \sqrt{w^2-1}\,dw\,.$$

On pose $w = \varphi(u) = \cosh(u)$. Ainsi $\varphi'(u) = \sinh(u)$ et u varie entre 0 et $a := \cosh^{-1}(x)$ car $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(a) = x$. L'intégrale devient

$$2\int_1^x \sqrt{w^2-1}\,dw = 2\int_0^a \sqrt{\cosh(u)^2-1}\cdot\sinh(u)\,du = 2\int_0^a \sinh(u)^2\,du =: I\,.$$

Pour calculer I, on intègre par parties avec $f'(u) = g(u) = \sinh(u)$:

$$\begin{aligned} I = 2\int_0^a \sinh(u)^2\,du &= 2\Big[\cosh(u)\sinh(u)\Big]_0^a - 2\int_0^a \underbrace{\cosh(u)^2}_{=1+\sinh(u)^2}\,du \\ &= 2\cosh(a)\sinh(a) - 2\int_0^a 1\,du - I\ . \end{aligned}$$

Il suit que

$$I = \cosh(a)\sinh(a) - a = x\underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{=y} - \cosh^{-1}(x) = xy - \cosh^{-1}(x)\,.$$

Ainsi $t = xy - I = \cosh^{-1}(x)$ et donc $x = \cosh(t)$, $y = \sqrt{x^2-1} = \sinh(t)$.