Anna Lachowska


# Analyse I – Corrigé de la Série 13

**Exercice 1.**

*i*) Pour trouver le rayon de convergence on calcule la limite

$$\lim_{k\to\infty}|a_k|^{1/k} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{2k+1}\right)^{2-1/k} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{2k+1}\right)^2\left(\frac{2k+1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{2k+1}\right)^2\lim_{k\to\infty}\left(2+\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{4}.$$

Alors $r = 4$ et on a $]-4,4[\subset D$.

Pour $x = 4$ on obtient

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{2k+1}\right)^{2k-1}2^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2k+1}{k}\right)\left(\frac{2k}{2k+1}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(2+\frac{1}{k}\right)\frac{1}{(1+\frac{1}{2k})^{2k}}.$$

Le terme général de cette série ne converge pas vers zéro :

$$\lim_{k\to\infty}\left(2+\frac{1}{k}\right)\frac{1}{(1+\frac{1}{2k})^{2k}} = \frac{2}{e}\neq 0,$$

et donc la série diverge. Le même calcul montre que pour $x=-4$, le terme général de la série alternée $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{2k+1}\right)^{2k-1}2^{2k}(-1)^k$ ne converge pas vers zéro et donc la série diverge. Le domaine de convergence de la série entière est $D = ]-4,4[$.

*ii*) Pour trouver le rayon de convergence on calcule la limite

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)}{(k+3)3^{k+1}}\frac{(k+2)3^k}{k} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{3}\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)} = \frac{1}{3}.$$

Alors le rayon de convergence est $r = 3$, et on a $]-1,5[\subset D$.

Pour $x = 5$ on obtient la série numérique

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{(k+2)3^k}3^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{k+2},$$

dont le terme général ne converge pas vers zéro : $\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+2} = 1 \neq 0$. Le même argument montre que pour $x=-1$, le terme général de la série alternée

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{(k+2)3^k}(-3)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{k+2}$$

ne converge pas vers zéro. Finalement, $D = ]-1,5[$.

*iii*) Pour trouver le rayon de convergence on calcule la limite

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)}{(k+3)^2\,3^{k+1}}\frac{(k+2)^2\,3^k}{k} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{3}\frac{(k+1)(k+2)^2}{k(k+3)^2} = \frac{1}{3}.$$

Alors le rayon de convergence est $r=3$, et on a $]-1,5[\subset D$.

Pour $x=5$ on obtient la série numérique

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{(k+2)^2\,3^k}3^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{(k+2)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+2-2}{(k+2)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{2}{(k+2)^2}\right).$$

Rappel que $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ converge pour $p>1$ et diverge autrement. Puisque la série $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+2}$ diverge et la série $-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(k+2)^2}$ converge, la somme diverge. Par conséquence, $5\notin D$.

Pour $x=-1$ on obtient la série alternée

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{(k+2)^2\,3^k}(-3)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{(k+2)^2}.$$

Pour étudier la convergence de cette série on utilise le critère de Leibniz : la limite $\lim_{k\to\infty}\frac{(-1)^k k}{(k+2)^2}=0$ et pour démontrer que la suite des valeurs absolues est décroissante, on considère la fonction $f(x)=\frac{x}{(x+2)^2}$, $x\geq 0$. La dérivée $f'(x)=\frac{(x+2)^2-2(x+2)x}{(x+2)^4}=\frac{2-x}{(x+2)^3}<0$ pour tout $x>2$. Alors la suite $b_k=\frac{k}{(k+2)^2}$ est décroissante pour $k\geq 3$, et la série alternée converge par le critère de Leibniz. Donc $-1\in D$, et finalement on a $D=[-1,5[$.

*iv*) Pour trouver le rayon de convergence on calcule la limite

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)}{(k+3)^3\,3^{k+1}}\frac{(k+2)^3\,3^k}{k} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{3}\frac{(k+1)(k+2)^3}{k(k+3)^3} = \frac{1}{3}.$$

Alors le rayon de convergence est $r=3$, et on a $]-1,5[\subset D$.

Pour $x=5$ on obtient la série numérique

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{(k+2)^3\,3^k}3^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{(k+2)^3}.$$

Puisque pour tout $k\geq 0$, $\frac{k}{(k+2)^3}<\frac{k+2}{(k+2)^3}=\frac{1}{(k+2)^2}$, et la série $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+2)^2}$ converge, par le critère de comparaison la série $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{(k+2)^3}$ converge aussi. Pour $x=-1$, la série alternée $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,k}{(k+2)^3}$ converge absolument, et donc $-1\in D$ et $5\in D$. Finalement, $D=[-1,5]$.

**Exercice 2.**

Posons $f(x):=\dfrac{1}{5+x^3}$ et $g(x):=e^{-2x}$. Alors, $f,g:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ sont continues et $g(x)\geq 0$ sur $[0,1]$. De plus, les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont strictement décroissantes et positives sur $[0,1]$ : si $0<x_1<x_2<1$, on a $0<f(x_2)<f(x_1)$ et $0<g(x_2)<g(x_1)$, et alors le produit $f(x)g(x)$ est aussi une fonction positive est strictement décroissante : $0<f(x_2)g(x_2)<f(x_1)g(x_1)$. Alors $M=f(0)g(0)$ est le maximum et $m=f(1)g(1)$ le minimum de la fonction $f(x)g(x)$ sur l'intervale $[0,1]$. Par le théorème de la moyenne on a

$$f(1)g(1)\cdot(1-0)\leq\int_0^1\frac{e^{-2x}}{5+x^3}\,dx\leq f(0)g(0)\cdot(1-0)=\frac{1}{5}.$$

Puisque $e < 3$, on a $f(1)g(1) = \frac{e-2}{6} > \frac{1}{54}$. De plus, la fonction est plus petit que $\frac{1}{5}$ et donc l'inégalité à droite est stricte, d'où le résultat.

**Exercice 3.**

Les primitives $F$ sont définies à une constante $C \in \mathbb{R}$ près. La plupart des exemples suivent des formules élémentaires pour les dérivées.

*i)* $F(x) = -\cos(x) + C$

*ii)* $F(x) = \sin(x) + C$

*iii)* $F(x) = -\ln(|\cos(x)|) + C$

*iv)* $F(x) = e^x + C$

*v)* $F(x) = \displaystyle\int \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,dx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + C = \cosh(x) + C$

*vi)* $F(x) = \displaystyle\int \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,dx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + C = \sinh(x) + C$

*vii)* $F(x) = x\,(\ln(x) - 1) + C$

*viii)* $F(x) = \ln(|x|) + C$

*ix)* $F(x) = \displaystyle\int (ax+b)^s\,dx = \frac{1}{a}\int a(ax+b)^s\,dx = \frac{1}{a(s+1)}(ax+b)^{s+1} + C$ car $(ax+b)' = a$ et donc $F(x) = \displaystyle\frac{1}{a}\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \frac{1}{a}\int f(t)\,dt$ avec $f(t) = t^s$ et $t = \varphi(x) = ax+b$.

*x)* $F(x) = \displaystyle\int \frac{1}{1+x}\,dx - \int \frac{-1}{1-x}\,dx = \ln(|1+x|) - \ln(|1-x|) + C = \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + C$

*xi)* $F(x) = \displaystyle\int \frac{1}{(1+x)(1-x)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)}\,dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) dx$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + C$$

*xii)* $F(x) = \displaystyle -\int \frac{-2x}{1-x^2}\,dx = -\ln\big(|1-x^2|\big) + C$ car $(1-x^2)' = -2x$ (même idée qu'au *ix*)

*xiii)* $F(x) = \displaystyle\int \frac{1}{\tan(x)}\,dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx = \ln(|\sin(x)|) + C$ car $\big(\sin(x)\big)' = \cos(x)$ (même idée qu'au *ix*)

*xiv)* $F(x) = \displaystyle\frac{1}{2}\int 2x\exp(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\exp(x^2) + C$ (même idée qu'au *ix*)

*xv)* $F(x) = \displaystyle\int (ax^p + b)^s\, x^{p-1}\,dx = \frac{1}{ap}\int ap\,x^{p-1}(ax^p+b)^s\,dx = \frac{1}{ap(s+1)}\,(ax^p+b)^{s+1} + C$ car $(ax^p + b)' = ap\,x^{p-1}$ (même idée qu'au *ix*)

**Exercice 4.**

La formule pour le changement de variable $x = \varphi(u)$ est $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du$ .

*i)* Pour $x = \varphi(u) = \sin(u)$ on a $f(\varphi(u)) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2(u)}} = \dfrac{1}{\sqrt{\cos^2(u)}} = \dfrac{1}{\cos(u)}$ et $\varphi'(u) = \cos(u)$. Ainsi

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{\cos(u)}{\cos(u)}\,du = \int du = u + C = \arcsin(x) + C\,,$$

où on a utilisé que $u = \varphi^{-1}(x) = \arcsin(x)$.

*ii*) Pour $x = \varphi(u) = \tan(u)$ on a $f(\varphi(u)) = \dfrac{1}{1+\tan^2(u)} = \dfrac{\cos^2(u)}{\cos^2(u)+\sin^2(u)} = \cos^2(u)$ et $\varphi'(u) = \dfrac{1}{\cos^2(u)}$. Ainsi

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{\cos^2(u)}{\cos^2(u)}\,du = \int du = u + C = \arctan(x) + C\,,$$

où on a utilisé que $u = \varphi^{-1}(x) = \arctan(x)$.

*iii*) Pour $x = \varphi(t) = \ln(t)$ on a $f(\varphi(t)) = \dfrac{1}{e^{\ln(t)}+1} = \dfrac{1}{1+t}$ et $\varphi'(t) = \dfrac{1}{t}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{e^x+1}\,dx &= \int \frac{1}{t(1+t)}\,dt = \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\,dt = \ln(t) - \ln(t+1) + C\\ &= \ln\left(1 - \frac{1}{t+1}\right) + C = \ln\left(1 - \frac{1}{e^x+1}\right) + C = -\ln\bigl(1+e^{-x}\bigr) + C.\end{aligned}$$

où on a utilisé que $t = \varphi^{-1}(x) = e^x$.

*iv*) Pour $x = \varphi(t) = t^2+1$ on a $f(\varphi(t)) = (t^2+1)\sqrt{t^2+1-1} = t(t^2+1)$ et $\varphi'(t) = 2t$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x-1}\,dx &= \int 2t^2(t^2+1)\,dt = \int 2t^4 + 2t^2\,dt = \frac{2t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + C\\ &= \frac{2(x-1)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C\end{aligned}$$

où on a utilisé que $t = \varphi^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$.

**Exercice 5.**

Pour calculer l'intégrale *i*), on propose de la ramener à des intégrales standards. Pour calculer les intégrales *ii*) − *iii*) et *v*) − *viii*), on propose de procéder par changement de variable. Notez qu'il n'y a pas de méthode absolue et que vous pouvez procéder de manière différente si vous le souhaitez.

*i*) On sépare la somme en deux termes

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+4}{1+x^2}\,dx &= \int \left(\frac{3x}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^2}\right)dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx + 4\int \frac{1}{1+x^2}\,dx\\ &= \frac{3}{2}\ln\bigl(1+x^2\bigr) + 4\arctan(x) + c\,.\end{aligned}$$

*ii*) Comme $\bigl(\cos(x)\bigr)' = -\sin(x)$, on a

$$\frac{\sin(x)}{\cos^3(x)} = f\bigl(\varphi(x)\bigr)\cdot\bigl(-\varphi'(x)\bigr)\,,$$

avec $t = \varphi(x) = \cos(x)$ et $f(t) = \dfrac{1}{t^3}$. Ainsi

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}\,dx = -\int \frac{1}{t^3}\,dt = \frac{1}{2t^2} + C = \frac{1}{2\cos^2(x)} + C\,.$$

*Autre méthode :* Comme $(tg(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$, on peut prendre $t = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et on a

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}\,dx = \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}\tan^2(x) + C\,.$$

Notez que $\dfrac{1}{2}\tan^2(x) = \dfrac{1-\cos^2(x)}{2\cos^2(x)} = \dfrac{1}{2\cos^2(x)} - 1$, donc la différence entre les deux primitives est une constante.

*iii*) Comme

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{3}{4}x^2}}\,,$$

on pose $x = \varphi(u) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}u$ si bien que $\varphi'(u) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ et on obtient

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{3}{4}x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\arcsin(u) + C = \frac{\sqrt{3}}{3}\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right) + C\,.$$

*iv*) En utilisant la définition du sinus hyperbolique, on a

$$\begin{aligned}\int \frac{\sinh(x)}{e^x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-x}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(1-e^{-x})(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int (1-e^{-x})\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}e^{-x} + C\,.\end{aligned}$$

*v*) Posons $e^x = t$ et donc $x = \ln(t)$ et $dx = \dfrac{1}{t}dt$. On a

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx = \int \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,dt$$

Posons $u = \sqrt{t+1}$ et donc $t = u^2 - 1$ et $dt = 2udu$. On a

$$\begin{aligned}\int \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,dt &= \int \frac{2u(u^2-1)}{u}\,du = \int 2u^2 - 2\,du = \frac{2u^3}{3} - 2u + C\\ &= \frac{2(t+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - 2\sqrt{t+1} + C = \frac{2(e^x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - 2\sqrt{e^x+1} + C\end{aligned}$$

*vi*) Posons $t = \ln(2x)$ et donc $x = \dfrac{e^t}{2}$ et $dx = \dfrac{e^t}{2}dt$. Ainsi

$$\int \frac{\ln(2x)}{x\ln(4x)}\,dx = \int \frac{t}{\frac{e^t}{2}(\ln(2)+t)}\frac{e^t}{2}\,dt = \int \frac{t}{\ln(2)+t}\,dt$$

Puis on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{t}{\ln(2)+t}\,dt &= \int \left(1 - \frac{\ln(2)}{\ln(2)+t}\right)\,dt\\ &= t - \ln(2)\ln|\ln(2)+t| + C\\ &= \ln(2x) - \ln(2)\ln|\ln(2x)+\ln(2)| + C\\ &= \ln(x) - \ln(2)\ln|\ln(x)+\ln(4)| + C\,.\end{aligned}$$

*vii*) Posons $t=\sqrt{e^x-1}$. On a donc $x=\ln(t^2+1)$ et $dx=\dfrac{2t}{t^2+1}dt$. Ainsi,

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx=\int \frac{2t}{t(t^2+1)}\,dt=2\int \frac{dt}{1+t^2}=2\text{arctan}(t)+C=2\text{arctan}(\sqrt{e^x-1})+C$$

*viii*) Posons $x=\sin(t)$ et donc $t=\arcsin(x)$ et $dx=\cos(t)dt$. Et ainsi

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx&=\int \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\cos(t)\,dt=\int \sin^2(t)\,dt=\int \frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt=\frac{t}{2}-\frac{\sin(2t)}{4}+C\\&=\frac{t}{2}-\frac{\sin(t)\cos(t)}{2}=\frac{\arcsin(x)}{2}-\frac{x\cos(\arcsin(x))}{2}+C\\&=\frac{\arcsin(x)-x\sqrt{1-x^2}}{2}+C\end{aligned}$$

On utilise ici l'idéntité $\cos(\arcsin(x))=\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}=\sqrt{1-x^2}$.

**Exercice 6.**

*i*) En utilisant que $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$, on observe que

$$\sin^5(x)=\big(1-\cos^2(x)\big)^2\sin(x)=-f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)$$

avec $t=\varphi(x)=\cos(x)$ et $f(t)=(1-t^2)^2$.
Comme les bornes de $x$ sont $\alpha=0$ et $\beta=\frac{\pi}{2}$, les bornes de $t$ sont $a=\varphi(\alpha)=1$ et $b=\varphi(\beta)=0$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\big(1-\cos^2(x)\big)^2\sin(x)\,dx&=-\int_1^0(1-t^2)^2\,dt=\int_0^1(1-2t^2+t^4)\,dt\\&=\left[t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5\right]_0^1=\frac{8}{15}.\end{aligned}$$

*ii*) On pose $x=\varphi(u)=u^2-1$, $\varphi'(u)=2u$. Comme $x$ varie entre $a=2=\varphi(\sqrt{3})$ et $b=3=\varphi(2)$, les bornes de $u$ sont $\alpha=\sqrt{3}$ et $\beta=2$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int_2^3\frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx&=2\int_{\sqrt{3}}^2\frac{u^2}{u^2-1}\,du=2\int_{\sqrt{3}}^2\left(1+\frac{1}{u^2-1}\right)du\\&=2\int_{\sqrt{3}}^2du+\int_{\sqrt{3}}^2\frac{u+1-(u-1)}{(u+1)(u-1)}\,du\\&=2\int_{\sqrt{3}}^2du+\int_{\sqrt{3}}^2\frac{1}{u-1}\,du-\int_{\sqrt{3}}^2\frac{1}{u+1}\,du\\&=\left[2u+\ln\left(\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right)\right]_{\sqrt{3}}^2=4-2\sqrt{3}+\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{3(\sqrt{3}-1)}\right).\end{aligned}$$

*iii*) Le changement de variable à poser est $x=\varphi(u)=u^2$, $\varphi'(u)=2u$. Comme $x$ varie entre $a=\frac{\pi^2}{16}=\varphi\big(\frac{\pi}{4}\big)$ et $b=\frac{\pi^2}{9}=\varphi\big(\frac{\pi}{3}\big)$, les bornes de $u$ sont $\alpha=\frac{\pi}{4}$ et $\beta=\frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned}\int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9}\cos(\sqrt{x})\,dx&=2\int_{\pi/4}^{\pi/3}u\cos(u)\,du\overset{(*)}{=}2\Big[u\sin(u)\Big]_{\pi/4}^{\pi/3}-2\int_{\pi/4}^{\pi/3}\sin(u)\,du\\&=2\Big[u\sin(u)+\cos(u)\Big]_{\pi/4}^{\pi/3}=1-\sqrt{2}-\frac{\pi\sqrt{2}}{4}+\frac{\pi\sqrt{3}}{3}\ ,\end{aligned}$$

où on a intégré $(*)$ par parties avec $f'(u)=\cos(u)\,,\ g(u)=u$.

**Exercice 7.**

Soit $u = x^{33}$, alors $du = 33x^{32}dx$. Si $x \in [0, \pi^{1/33}]$, alors $u \in [0, \pi]$. On obtient l'intégrale

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi^{1/33}} \sin(\sin(x^{33}))\,\cos(x^{33})\,x^{32}\,dx &= \frac{1}{33}\int_0^{\pi} \sin(\sin(u))\cos(u)\,du \\
&= \frac{1}{33}\Big[-\cos(\sin(u))\Big]_0^{\pi} \qquad \text{car } \big(\sin(u)\big)' = \cos(u) \\
&= \frac{1}{33}\Big(-\cos(\sin(\pi)) + \cos(\sin(0))\Big) \\
&= \frac{1}{33}(-\cos(0) + \cos(0)) = 0\ .
\end{aligned}$$

**Exercice 8.**

(Q1) VRAI.
Démonstration par contraposée : Supposons que pour tout $c \in ]a,\, b[$, on a $f'(c) > 0$. Alors $f$ est strictement croissante sur $[a,\, b]$ par propriété (DZ §6.2.16).

(Q2) FAUX.
Prendre la fonction $f$ définie sur $[a,\, b]$ telle que $f(x) = x^3$. On a bien $f'(x) = 0$ mais $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(Q3) VRAI.
Puisque $f$ change de monotonie sur $]a,\, b[$, alors il existe deux intervalles $[a_1,\, b_1]$ et $[a_2,\, b_2]$ inclus dans $]a,\, b[$ tels que $f'$ est négative sur $[a_1,\, b_1]$ et positive sur $[a_2,\, b_2]$. Posons $c_1 \in [a_1,\, b_1]$ et $c_2 \in [a_2,\, b_2]$ et supposons pour fixer les idées $c_1 \leq c_2$. Ensuite, $f$ étant de classe $C^\infty$ sur $]a,\, b[$, sa dérivée $f'$ est continue sur $]a,\, b[$. Nous pouvons donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $f'$ sur l'intervalle $[c_1,\, c_2]$ qui nous indique qu'il existe $c \in [c_1,\, c_2]$ tel que $f'(c) = 0$.

(Q4) VRAI.
$f$ étant de classe $C^\infty$ sur $[a,\, b]$, la fonction $f''$ est donc continue en $c \in [a,\, b]$.
Par définition de la continuité, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $y$ tel que $|y - c| \leq \alpha$, on aie $f''(y) > 0$.
De plus, la formule de Taylor appliqué à la fonction $f$ nous donne

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) + f''(c + \theta_x(x-c))\frac{(x-c)^2}{2} \quad \text{où } \theta_x \in ]0,\, 1[ \\
&= f(c) + f''(c + \theta_x(x-c))\frac{(x-c)^2}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi, en choisissant $x$ tel que $|x - c| < \alpha$, on obtient $f(x) - f(c) \geq 0$ et $f$ admet bien un minimum local au point de coordonnées $c,\, f(c)$.

(Q5) FAUX.
Prendre la fonction $f$ définie sur $[a,\, b]$ telle que $f(x) = -x^4$. $f$ admet un maximum global et donc local en $x = 0$ mais on a $f'(0) = f''(0) = 0$.

(Q6) FAUX.
On peut reprendre la même fonction de la question précédente. On a bien $f'(0) = f''(0) = 0$ mais $f$ est concave car pour tout $x \in [a,\, b]$, $f''(x) = -12x^2 \leq 0$. Ainsi, $(0,\, 0)$ n'est pas un point d'inflexion à la courbe représentative de $f$.

(Q7) FAUX.

Prendre la fonction $f$ définie sur $[a, b]$ telle que $f(x) = x^3 + x$. On a $f''(x) = 6x$ qui change de signe en 0. Donc $(0, 0)$ est bien un point d'inflexion à la courbe représentative de $f$ mais $f'(0) = 1$.

(Q8) VRAI.

C'est la propriété DZ §6.5.4.

(Q9) VRAI.

(Voir Proposition DZ §6.5.5.) Démonstration par absurde. Supposons qu'il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f''(c) > 0$ (on pourrait très bien choisir $f''(c) < 0$).

Puisque la fonction $f$ est de classe $C^\infty$ sur $]a, b[$, alors la fonction $f''$ est continue. Donc par définition, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $y$ tel que $|y - c| \leq \alpha$, on ait $f''(y) > 0$.

Nous pouvons écrire le développement de Taylor de la fonction $f$ :

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + f''(c + \theta_x(x - c))\frac{(x - c)^2}{2} \text{ où } \theta_x \in ]0, 1[$$

Ainsi, en posant la fonction $\psi$, définie par $\psi(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)$ comme fonction permettant de déterminer la position de la courbe représentative de $f$ par rapport à sa tangente au point $(c, f(c))$, on obtient $\psi(x) = f''(c + \theta_x(x - c))\dfrac{(x - c)^2}{2}$.

Pour tout $x$ tel que $|x - c| \leq \alpha$, on obtient que $\psi(x)$ garde un signe constant, ce qui prouve que la fonction ne change pas de convexité.

(Q10) VRAI.

C'est la propriété DZ §6.6.3.

(Q11) FAUX.

Prendre la fonction $f$ définie sur $[a, b]$ telle que $f(x) = x^4$. Alors $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc la fonction est convexe pour tout $x \in \mathbb{R}$, mais $f''(0) = 0$. (Voir DZ §6.6.4).