Anna Lachowska

Analyse I – Corrigé de la Série 12

Exercice 1.

Nous allons démontrer que les fonctions suivantes sont indéfiniment dérivables sur leur domaine de définition en explicitant leur dérivée n-ième.

i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sin^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } n \equiv 0 \ [4] \\ \cos(x) & \text{si } n \equiv 1 \ [4] \\ -\sin(x) & \text{si } n \equiv 2 \ [4] \\ -\cos(x) & \text{si } n \equiv 3 \ [4] \end{cases}$$

La série de Mac-Laurin de la fonction sin est donc la suivante :

$$\sin(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

De plus, en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, on a d'après le critère de d'Alembert que

$$\left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| = \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \frac{(2n+1)!}{|x|^{2n+1}} = \frac{x^2}{2(2n+3)(n+1)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Et ce, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Ainsi, $R = +\infty$.

ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\cos^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } n \equiv 0 \ [4] \\ -\sin(x) & \text{si } n \equiv 1 \ [4] \\ -\cos(x) & \text{si } n \equiv 2 \ [4] \\ \sin(x) & \text{si } n \equiv 3 \ [4] \end{cases}$$

La série de Mac-Laurin de la fonction cos est donc la suivante :

$$\cos(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

De plus, en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, on a d'après le critère de d'Alembert que

$$\left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| = \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{|x|^{2n}} = \frac{x^2}{2(2n+1)(n+1)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Et ce, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Ainsi, $R = +\infty$.

iii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

La série de Mac-Laurin de la fonction exponentielle est donc la suivante :

$$e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

De plus, en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$, on a d'après le critère de d'Alembert que

$$\left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{(n+1)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Et ce, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Ainsi, $R = +\infty$.

iv) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left(e^{-x}\right)^{(n)} = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } n \equiv 0 \ [2] \\ -e^{-x} & \text{si } n \equiv 1 \ [2] \end{cases}$$

La série de Mac-Laurin de la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est donc la suivante :

$$e^{-x} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

De plus, en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^n}{n!}$, on a d'après le critère de d'Alembert que

$$\left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{(n+1)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Et ce, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Ainsi, $R = +\infty$.

v) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\operatorname{sh}^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{sh}(x) & \text{si } n \equiv 0 \ [2] \\ \operatorname{ch}(x) & \text{si } n \equiv 1 \ [2] \end{cases}$$

La série de Mac-Laurin de $\operatorname{sh}(x)$ est donc la suivante :

$$\operatorname{sh}(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

ce qui confirme que la fonction sinus hyperbolique est la partie impaire de l'exponentielle. De plus, en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n(x) = \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, on a d'après le critère de d'Alembert que

$$\left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| = \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \frac{(2n+1)!}{|x|^{2n+1}} = \frac{x^2}{2(2n+3)(n+1)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Et ce, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Ainsi, $R = +\infty$.

vi) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathrm{ch}^{(n)}(x) = \begin{cases} \mathrm{ch}(x) & \text{si } n \equiv 0 \ [2] \\ \mathrm{sh}(x) & \text{si } n \equiv 1 \ [2] \end{cases}$$

La série de Mac-Laurin de $\mathrm{ch}(x)$ est donc la suivante :

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

ce qui confirme que la fonction cosinus hyperbolique est la partie paire de l'exponentielle. De plus, en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, on a d'après le critère de d'Alembert que

$$\left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| = \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{|x|^{2n}} = \frac{x^2}{2(2n+1)(n+1)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Et ce, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Ainsi, $R = +\infty$.

vii) Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\ln^{(n)}(1+x) = \begin{cases} -\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n} & \text{si } n \equiv 0 \ [2] \\ \dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n} & \text{si } n \equiv 1 \ [2] \end{cases}$$

La série de Mac-Laurin de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est donc la suivante :

$$\ln(1+x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

De plus, pour le rayon de convergence on a

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{n+1}{(-1)^{n+2}} \right| = 1.$$

Ainsi, $R = 1$.

viii) Pour tout $x \in]-\infty, 1[$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\ln^{(n)}(1-x) = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

La série de Mac-Laurin de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ est donc la suivante :

$$\ln(1-x) = -\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$$

De plus, pour le rayon de convergence on a

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 1.$$

Ainsi, $R = 1$.

ix) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left((1+x)^m\right)^{(n)}(x) = \left(\prod_{i=0}^{n-1}(m-i)\right)(1+x)^{m-n}$$

La série de Mac-Laurin de la fonction $x \mapsto (1+x)^m$ est donc la suivante :

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{m(m-1)\dots(m-(n-1))}{n!} x^n$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n(x) = 1 + \sum_{n\geq 1} \dfrac{m(m-1)\dots(m-(n-1))}{n!} x^n$.
Si $m \notin \mathbb{N}$, alors pour le rayon de convergence on a

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} \frac{(n+1)!}{m(m-1)\dots(m-n)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{m-n} \right| = 1.$$

On a $R = 1$ si $m \notin \mathbb{N}$ et $R = +\infty$ sinon car la série devient une somme finie.

Exercice 2.

Notez que dans les exemples ci-dessous on peut échanger la dérivation et la somme infinie pour tout x dans l'intérieur du domaine de convergence de la série entière. Pour la série de Mac-Laurin $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ on a donc

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dx}(x^n), \qquad x \in]-R, R[.$$

i) $$\frac{d}{dx}e^x = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x$$

ii) $$\frac{d}{dx}\sin(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos(x)$$

iii) $$\frac{d}{dx}\cos(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} = -\sin(x)$$

iv) $$\frac{d}{dx}\ln(1+x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}, \quad |x| < 1 \text{ (série géométrique)}$$

Exercice 3.

Le développement limité d'ordre 3 autour du point a d'une fonction f de classe C^4 est donné par la formule

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + R_3(x),$$

où $R_3(x) = \dfrac{f^{(4)}(u)}{4!}(x-a)^4$ pour un certain u entre a et x.

i) On calcule les dérivées de f :

$$f'(x) = 3\cos(3x), \quad f''(x) = -9\sin(3x), \quad f'''(x) = -27\cos(3x), \quad f^{(4)}(x) = 81\sin(3x)$$
$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 3, \qquad f''(0) = 0, \qquad f'''(0) = -27.$$

Donc le développement limité de f d'ordre 3 autour de 0 est

$$f(x) = \sin(3x) = 0 + 3x + 0 \cdot x^2 - \frac{27}{3!}x^3 + R_3(x) = 3x - \frac{27}{3!}x^3 + R_3(x) = 3x - \frac{9}{2}x^3 + R_3(x)\,,$$

avec $R_3(x) = \dfrac{81\sin(3u)}{4!}\,x^4 = \dfrac{27\sin(3u)}{8}\,x^4$ pour un certain u entre 0 et x.

ii) On calcule

$$f'(x) = \frac{1}{2+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(2+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(2+x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(2+x)^4}$$
$$f(0) = \ln(2), \qquad f'(0) = \frac{1}{2}, \qquad f''(0) = -\frac{1}{4}, \qquad f'''(0) = \frac{1}{4}.$$

Ainsi, le développement limité de f d'ordre 3 autour de 0 est

$$f(x) = \ln(2+x) = \ln(2) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + R_3(x)$$

avec $R_3(x) = -\dfrac{6}{4!(2+u)^4}\,x^4 = -\dfrac{1}{4(2+u)^4}\,x^4$ pour un certain u entre 0 et x.

iii) Comme $\sin(x)\cos(x) = 1/2\sin(2x)$, on a

$$f'(x) = 1/2 \cdot 2\cos(2x) = \cos(2x), \quad f''(x) = -2\sin(2x), \quad f'''(x) = -4\cos(2x),$$
$$f^{(4)}(x) = 8\sin(2x).$$

Alors on a

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f''(0) = -4, \quad f^{(4)}(0) = 0.$$
$$\sin(x)\cos(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + R_3(x)$$

avec $R_3(x) = \dfrac{f^{(4)}(u)}{4!}x^4 = \dfrac{1}{3}\sin(2u)\,x^4$ pour un certain u entre 0 et x.

Exercice 4.

i)

$$\begin{aligned}
\ln(\cos(x)) &= \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \varepsilon(x)\,x^4\right) \\
&= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \varepsilon(x)\,x^4\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \varepsilon(x)\,x^4\right)^2 \\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \varepsilon(x)\,x^4
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
\exp(\sin(x)) &= \exp\left(x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)\,x^4\right) \\
&= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)\,x^4\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)\,x^4\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)\,x^4\right)^3 \\
&+ \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)\,x^4\right)^4 + \varepsilon(x)x^4 \\
&= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \varepsilon(x)\,x^4 \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \varepsilon(x)\,x^4
\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\sin(x)} &= \left(1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)\,x^4\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)\,x^4\right) - \frac{1}{8}\left(x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)\,x^4\right)^2 + \frac{1}{16}\left(x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)\,x^4\right)^3 \\
&- \frac{5}{128}\left(x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)\,x^4\right)^4 \\
&= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \varepsilon(x)\,x^4 \\
&= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^4}{384} + \varepsilon(x)\,x^4
\end{aligned}$$

iv) Tout d'abord, effectuons une décomposition en éléments simples de la fonction f. On sait que f peut s'écrire de la forme suivante :

$$f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+2x}$$

où $(A,\, B) \in \mathbb{R}^2$. Donc on a $A + B = 3$ et $2A - B = 0$, d'où $A = 1$ et $B = 2$. Ainsi, on a

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x}$$

Il ne nous reste plus qu'à additionner les deux développements limités des fractions rationnelles obtenues :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \varepsilon(x)\,x^4\right) + 2\left(1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + 16x^4 + \varepsilon(x)\,x^4\right) \\
&= 3 - 3x + 9x^2 - 15x^3 + 33x^4 + \varepsilon(x)\,x^4
\end{aligned}$$

v) Ici, il suffit juste de remplacer x par x^2 dans le développement limité usuel de la fonction exponentielle.

$$e^{x^2} = \sum_{k\geq 0}^{n} \frac{x^{2k}}{k!} + \varepsilon(x)x^{2n}$$

vi)

$$\begin{aligned}\ln(1+x-2x^2) &= \left(x-2x^2\right) - \frac{1}{2}\left(x-2x^2\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x-2x^2\right)^3 - \frac{1}{4}\left(x-2x^2\right)^4 + \varepsilon(x)\,x^4 \\ &= x - 2x^2 - \frac{x^2}{2} + 2x^3 - 2x^4 + \frac{x^3}{3} - 2x^4 - \frac{x^4}{4} + \varepsilon(x)\,x^4 \\ &= x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{7x^3}{3} - \frac{17x^4}{4} + \varepsilon(x)\,x^4\end{aligned}$$

vii) Comme dans l'Exercice 3. *ii)*, il nous faut transformer f pour la faire ressembler à une forme usuelle :

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} = \frac{x}{9}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}$$

Et donc,

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x}{9}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{9^k} + \varepsilon(x)x^{2n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{9^{k+1}} + \varepsilon(x)x^{2n+1}\end{aligned}$$

Exercice 5.

On utilise que le développement de $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ en série entière est $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ pour tout $z \in]-1,1[$.

i) On peut récrire

$$f(x) = \frac{2}{3+4x} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{3}x}.$$

Ainsi, en posant $z := -\frac{4}{3}x$, on obtient que son développement en série entière est

$$f(x) = \frac{2}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{3}\right)^n x^n \qquad \text{pour } x \in \left]-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right[.$$

ii) De façon similaire, on peut récrire

$$f(x) = \frac{2}{3+4x} = \frac{2}{11+4(x-2)} = \frac{2}{11}\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{11}(x-2)}$$

de telle sorte qu'en posant $z := -\frac{4}{11}(x-2)$, on obtient que son développement en série entière est

$$f(x) = \frac{2}{11}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{11}\right)^n (x-2)^n,$$

avec intervalle de convergence $\left]-\frac{3}{4},\frac{19}{4}\right[$ (obtenue à partir de $z = -\frac{4}{11}(x-2) \in]-1,1[$).

Remarque générale : On peut aussi calculer le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ en utilisant la formule

$$r = 1\Big/\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \qquad \text{ou} \qquad r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{1}$$

si ces limites existent.

Exercice 6.

Si $f \in C^\infty(I)$ et si $R_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ dans le développement limité de f en $a \in I$, la série de Taylor de f en a est donnée par $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ pour $x \in I$.

i) On a $f^{(n)}(x) = 2^n \cdot e^{2x+1}$ et $f^{(n)}(0) = 2^n \cdot e$. Ainsi le développement limité d'ordre n de f autour de $a = 0$ est

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k e}{k!}\, x^k + R_n(x) \quad \text{avec} \quad R_n(x) = \frac{2^{n+1} \cdot e^{2u+1}}{(n+1)!}\, x^{n+1} \quad \text{pour un certain } u \text{ entre } 0 \text{ et } x.$$

En outre, étant donné que pour x fixé

$$0 \leq |R_n(x)| \leq \frac{2^{n+1} \cdot e \cdot \max\{e^{2x}, 1\}}{(n+1)!}\, |x|^{n+1}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2|x|)^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

il suit que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Comme en plus $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, la série de Taylor de f autour de $a = 0$ est donnée par

$$f(x) = e^{2x+1} = e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\, x^n \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

et son rayon de convergence est $r = \infty$.

ii) <u>*Méthode 1*</u> : Considérer $f(x)$ comme somme d'une série géométrique. On obtient

$$f(x) = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3+(x-2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{3}(x-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\,(x-2)^n$$

qui converge vers la fonction $f(x) = \frac{1}{x+1}$ si et seulement si $-1 < -\frac{1}{3}(x-2) < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 5$.

<u>*Méthode 2*</u> : On utilise directement la formule de Taylor. On calcule que

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+1)^{n+1}} \qquad \text{et} \qquad f^{(n)}(2) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{3^{n+1}}\,.$$

D'où le développement limité d'ordre n de $f(x)$ autour de 2 :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}}(x-2)^k}_{=f_n(x)} + R_n(x)$$

où $R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{u+1} \left(\frac{x-2}{u+1}\right)^{n+1}$ pour un certain u entre 2 et x.

On calcule le rayon de convergence par la formule générale (1) (en fait, on ne peut pas facilement démontrer la convergence du reste R_n vers 0 dans ce cas) :

$$r = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1} = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|3^{-(n+1)}|}\right)^{-1} = \left(\lim_{n\to\infty} 3^{-(1+\frac{1}{n})}\right)^{-1} = 3\,.$$

Donc f_n converge sur $]-1,5[$, et il faut encore examiner la convergence aux bornes. Comme f n'est pas définie en $x=-1$, f_n ne peut converger en ce point (notez pourtant que $f_n(-1)$ existe). Pour $x=5$, on a $f_n(5) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{3}$ qui n'admet pas de limite lorsque $n\to\infty$. Ainsi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-2)^n$$

converge pour $-1 < x < 5$.

Exercice 7.

Il faut choisir l'ordre des développements limités tel que l'on puisse éliminer le dénominateur. Comme on s'intéresse seulement à des limites, il suffit que l'on obtienne finalement un reste en $\varepsilon(x)$ (garder plus de termes conduirait seulement à plus de calculs).

i) Comme

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \varepsilon(x)x^5 \quad \text{pour tout } x\in\mathbb{R},$$

on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^5}\left(x - \frac{x^3}{6} - \sin(x)\right) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{120} + \frac{\varepsilon(x)\,x^5}{x^5}\right) = -\frac{1}{120}\,,$$

puisque $\varepsilon(x)\to 0$ quand $x\to 0$.

ii) Comme

$$x - \ln(1+x) = x - x + \frac{x^2}{2} + \varepsilon(x)x^2 = \frac{x^2}{2} + \varepsilon(x)x^2,$$

et

$$e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x - 1 + \frac{x^2}{2} - 2x + \varepsilon(x)x^2 = x^2 + \varepsilon(x)x^2$$

on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x}{x - \ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \varepsilon(x)x^2}{\frac{x^2}{2} + \varepsilon(x)x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{\varepsilon(x)x^2}{x^2}}{\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon(x)x^2}{x^2}} = 2.$$

iii) Pour le développement limité d'ordre 6 du numérateur, il faut obtenir le développement limité d'ordre 5 de $\sin(\sin(x))$ et celui d'ordre 6 de $\sin^2(x)$.

Comme $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \varepsilon(x)x^5$, il s'ensuit que

$$\sin(\sin(x)) = (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \varepsilon(x)x^5)) - \frac{1}{6}(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \varepsilon(x)x^5)^3 + \frac{1}{120}(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \varepsilon(x)x^5)^5 + \varepsilon(x)x^5$$

où le dernier terme découle de $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Pour les puissances de $\sin(x)$ on a :

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \varepsilon(x)x^6\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + \varepsilon(x)x^6,\\
\sin^3(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \varepsilon(x)x^5\right)^3 = x^3 - \frac{x^5}{2} + \varepsilon(x)x^5,\\
\sin^5(x) &= \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \varepsilon(x)x^5\right)\left(x^3 - \frac{x^5}{2} + \varepsilon(x)x^5\right) = x^5 + \varepsilon(x)x^5,
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\sin(\sin(x)) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{1}{6}\left(x^3 - \frac{x^5}{2}\right) + \frac{x^5}{120} + \varepsilon(x)x^5\\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + \varepsilon(x)x^5.
\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(\sin(x)) - \sin(x)^2}{x^6} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{10} - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{2x^6}{45} + \varepsilon(x)x^6\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{18} + \frac{\varepsilon(x)x^6}{x^6}\right) = \frac{1}{18}\ .
\end{aligned}$$

iv) Nous avons que

$$\begin{aligned}
\ln\left(e^x - 2x\right) &= \ln\left(1 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)x^3\right)\\
&= \ln\left(1 - \left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)x^3\right)\right)\\
&= -\left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)x^3\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2} + \varepsilon(x)x^2\right)^2 -\\
&- \frac{1}{3}\left(x + \varepsilon(x)x\right)^3 =\\
&= -x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3} + \varepsilon(x)x^3 =\\
&= -x + \frac{x^3}{3} + \varepsilon(x)x^3.
\end{aligned}$$

Et donc,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \ln(e^x - 2x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3} + \varepsilon(x) = \frac{1}{3}.$$

Exercice 8.

i) Observons que $\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$. Ainsi, en utilisant les résultats de l'Exercice 1., on obtient

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) &= \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right) + \varepsilon(x)x^5\\
&= -2x - \frac{2x^3}{3} - \frac{2x^5}{5} + \varepsilon(x)x^5.
\end{aligned}$$

ii) <u>*Méthode 1*</u> : Utiliser l'égalité $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et les développements limités d'ordre 5 de

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \varepsilon(x)x^5 \quad \text{et} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \varepsilon(x)x^5 .$$

ainsi que celui d'ordre 2 de

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \varepsilon(x)x^2 .$$

Comme $\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \varepsilon(x)x^5$, on obtient

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \varepsilon(x)x^5\right) + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \varepsilon(x)x^5\right)^2 + \varepsilon(x)x^4 = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \varepsilon(x)x^4$$

et ainsi

$$\tan(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \varepsilon(x)x^5\right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \varepsilon(x)x^5\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \varepsilon(x)x^5 ,$$

c'est-à-dire

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \varepsilon(x)x^5 .$$

<u>*Méthode 2*</u> : Utiliser la définition de la série Taylor et donc calculer les dérivées de $f(x) = \tan(x)$ qui sont :

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \qquad f''(x) = \frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}, \qquad f'''(x) = \frac{2 + 4\sin^2(x)}{\cos^4(x)},$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{8\sin(x)\left(2 + \sin^2(x)\right)}{\cos^5(x)}, \qquad f^{(5)}(x) = \frac{8\left(2 + 11\sin^2(x) + 2\sin^4(x)\right)}{\cos^6(x)},$$

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1, \qquad f''(0) = 0, \qquad f'''(0) = 2, \qquad f^{(4)}(0) = 0, \qquad f^{(5)}(0) = 16.$$

Ainsi

$$\tan(x) = \frac{1}{1!}x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 + \varepsilon(x)x^5 = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \varepsilon(x)x^5.$$

iii) On calcule

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \qquad f'''(x) = \frac{8x^2}{(1+x^2)^3} - \frac{2}{(1+x^2)^2},$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-48x^3}{(1+x^2)^4} + \frac{24x}{(1+x^2)^3}, \qquad f^{(5)}(x) = \frac{384x^4}{(1+x^2)^5} - \frac{288x^2}{(1+x^2)^4} + \frac{24}{(1+x^2)^3},$$

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1, \qquad f''(0) = 0, \qquad f'''(0) = -2, \qquad f^{(4)}(0) = 0, \qquad f^{(5)}(0) = 24.$$

Ainsi

$$\arctan(x) = \frac{1}{1!}x - \frac{2}{3!}x^3 + \frac{24}{5!}x^5 + \varepsilon(x)x^5 = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \varepsilon(x)x^5.$$

Remarque. Autrement on peut calculer la série de MacLaurin de $\arctan(x)$ en intégrant celle de la fonction $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, puisque on a $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$.

iv) On utilise que pour $|x| < 1$ on a $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \varepsilon(x)x^3$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \varepsilon(x)x^5$. Soit $t = \tan(x)$. Alors

$$\big(1+t)\big)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + \underbrace{\varepsilon(t)\,t^3}_{=\varepsilon(x)x^3},$$

où $\varepsilon(t(x))\,t^3 = \varepsilon(x)x^3$ car $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x)}{x} = 1$. Comme

$$\tan^2(x) = \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \varepsilon(x)x^5\right)^2 = x^2 + \varepsilon(x)x^3$$

et

$$\tan^3(x) = \left(x^2 + \varepsilon(x)x^3\right)\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \varepsilon(x)x^5\right) = x^3 + \varepsilon(x)x^3$$

on a finalement

$$\sqrt{1+\tan(x)} = 1 + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{3}\right) - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \varepsilon(x)x^3 = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{11x^3}{48} + \varepsilon(x)x^3$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \varepsilon(x)x^2.$$

Exercice 9.

i) 1) $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $\quad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

2) Impaire

3) $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$

4) Continue et dérivable sur $D(f)$

$$f'(x) = -\frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}\,,\quad D(f') = D(f) \qquad \text{et} \qquad f''(x) = \frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}\,,\quad D(f'') = D(f)$$

5) • $f'(x) < 0$ pour tout $x \in D(f')$, donc pas de point stationnaire

• $f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$. On calcule alors f''' :

$$f'''(x) = -\frac{6(x^4+6x^2+1)}{(x^2-1)^4} < 0 \quad \text{pour tout } x \in D(f).$$

Comme $f'''(0) = -6 \neq 0$, f a un point d'inflexion en $x = 0$.

6) • Monotonie :

x	$]-\infty,-1[$	$]-1,1[$	$]1,\infty[$
f'	<0	<0	<0
f	décroissante	décroissante	décroissante

Notez bien que f est strictement décroissante sur chacun des intervalles listés dans le tableau mais pas sur $D(f)$.

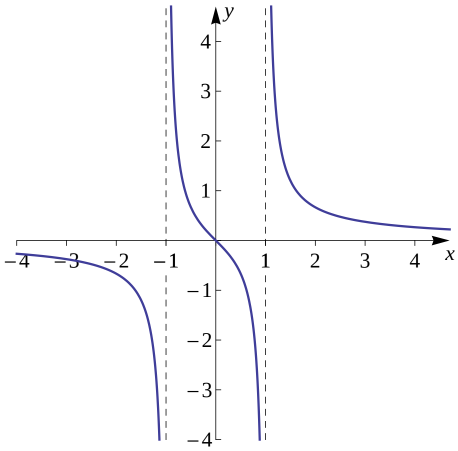

FIGURE 1 – Ex. 8(i)

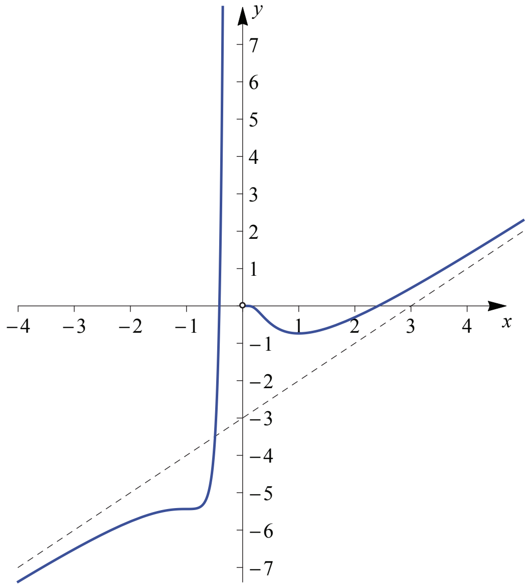

FIGURE 2 – Ex 8(ii)

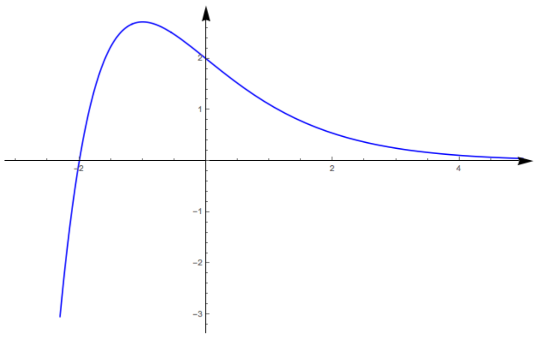

FIGURE 3 – Ex 8(iii)

- Convexité/concavité :

x	$]-\infty,-1[$	$]-1,0[$	$]0,1[$	$]1,\infty[$
f''	<0	>0	<0	>0
f	concave	convexe	concave	convexe

7) • Asymptotes verticales : f n'est pas définie en $x=\pm 1$ et on a $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$, donc des asymptotes verticales en $x = \pm 1$.
   • Asymptote horizontale : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, donc une asymptote horizontale en $y = 0$.

8) Le graphique de f est tracé à la Fig. 1.

ii) 1) $D(f) = \mathbb{R}^*, \quad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

2) ni paire, ni impaire

3) $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \pm \sqrt{2}.$

4) continue et dérivable sur $D(f)$, donc $D(f') = D(f'') = D(f)$

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x}} + \frac{x^2 - 2x - 1}{x} \cdot \frac{1}{x^2}\ e^{-\frac{1}{x}} = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3}\ e^{-\frac{1}{x}}$$

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4}\right) e^{-\frac{1}{x}} + \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3} \cdot \frac{1}{x^2}\ e^{-\frac{1}{x}} = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^5}\ e^{-\frac{1}{x}}$$

5) • $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x+1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$
Donc f a des points stationnaires en $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$. Comme $f'(x)$ ne change pas de signe en x_1, le point $x_1 = -1$ n'est pas un extremum local. Par contre, on a $f''(x_2) = \frac{4}{e} > 0$ et donc x_2 est un minimum local.

• $f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 + 2x - 1 = (3x-1)(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}$ ou $x = -1$
Ainsi $x_1 = -1$ et $x_3 = \frac{1}{3}$ sont candidats pour un point d'inflexion. Puisque f'' change de signe en x_1 et en x_3, ce sont des points d'inflection. D'autre manière, ou pourrait vérifier que $f'''(x_1) \neq 0$ et $f'''(x_3) \neq 0$, où

$$f'''(x) = \left(-\frac{9}{x^4} - \frac{8}{x^5} + \frac{5}{x^6}\right) e^{-\frac{1}{x}} + \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^5} \cdot \frac{1}{x^2}\ e^{-\frac{1}{x}} = \frac{-9x^3 - 5x^2 + 7x - 1}{x^7}\ e^{-\frac{1}{x}},$$

6) • Monotonie :

x	$]-\infty, -1[$	$]-1, 0[$	$]0, 1[$	$]1, \infty[$
f'	> 0	> 0	< 0	> 0
f	croissante	croissante	décroissante	croissante

• Convexité/concavité :

x	$]-\infty, -1[$	$]-1, 0[$	$]0, \frac{1}{3}[$	$]\frac{1}{3}, \infty[$
f''	< 0	> 0	< 0	> 0
f	concave	convexe	concave	convexe

7) • Asymptote verticale : f n'est pas définie en $x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \infty$, donc une asymptote verticale en $x = 0$.

• Asymptote horizontale : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, donc aucune

• Asymptote oblique : $a = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ et

$$\begin{aligned} b = \lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - ax\big) &= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 2x - 1}{x} - xe^{\frac{1}{x}}\right) e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 2x - 1}{x} - xe^{\frac{1}{x}}\right) \cdot \lim_{x \to \pm\infty} e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$ et la première limite s'écrit

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pm\infty} \left(x(1 - e^{\frac{1}{x}}) - 2 - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} - 2 - \underbrace{\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x}}_{=0} \\ &\overset{\text{BH}}{=} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} - 2 = -1 - 2 = -3 \end{aligned}$$

Ainsi $b = -3$ et f a une asymptote oblique d'équation $y = ax + b = x - 3$.

8) Le graphique de f est tracé à la Fig. 2.

iii) 1) $D(f) = \mathbb{R}, \quad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

2) ni paire, ni impaire.

3) $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$.

4) Par opérations usuelles, f est continue et dérivable sur $D(f)$ et $D(f) = D(f') = D(f'')$.

$$f'(x) = \frac{e^x - e^x(x+2)}{(e^x)^2} = -\frac{x+1}{e^x}$$

$$f''(x) = -\frac{e^x - e^x(x+1)}{(e^x)^2} = \frac{x}{e^x}$$

5) • $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$
Donc f a un point stationnaire en $x = -1$. Puisque $f''(x_1) = -e < 0$, alors f admet un maximum local en $x = -1$.

• $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Étudions f''' en $x = 0$:

$$f'''(x) = \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$$

Ainsi, $f'''(0) = 1 \neq 0$. Nous avons donc bien un point d'inflexion en $x = 0$.

6) • Monotonie :

x	$]-\infty, -1[$	$]-1, +\infty[$
f'	> 0	> 0
f	croissante	décroissante

• Convexité/concavité :

x	$]-\infty, 0[$	$]0, +\infty[$
f''	< 0	> 0
f	concave	convexe

7) • Asymptote horizontale : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
Ainsi, la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

8) Le graphique de f est tracé à la Fig. 3.

Exercice 10.

Q1 : FAUX.
Prendre par exemple $f(x) = x + \sin(x)$ et $g(x) = x$. Dans ce cas on a $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{\sin(x)}{x}\right) = 1$ mais $\frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 + \cos(x)$ n'admet pas de limite à l'infini (et donc la dernière hypothèse de Bernoulli-l'Hospital n'est pas satisfaite).

Q2 : FAUX.
Prendre les fonctions de la question précédente.

Q3 : FAUX.

En posant par exemple $f(x) = \sin(x) + 2$ et $g(x) = 2x + 2$, on obtient que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Alors que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2}$$