Anna Lachowska

Analyse I – Corrigé de la Série 11

Exercice 1.

i) On distingue trois cas selon la valeur de m :

— $m = 0$: $\quad f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

— $m \geq 1$: $\quad f^{(n)}(x) = \begin{cases} m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^{m-n}\,, & n \leq m \\ 0\,, & n > m \end{cases}$

— $m \leq -1$: $\quad f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

ii) On commence par calculer les quatre premières dérivées de f :

$$f'(x) = 2\cos(2x) - 2\sin(x) \qquad f''(x) = -4\sin(2x) - 2\cos(x)$$
$$f'''(x) = -8\cos(2x) + 2\sin(x) \qquad f^{(4)}(x) = 16\sin(2x) + 2\cos(x)$$

Il faut donc distinguer deux cas selon la parité de $n \in \mathbb{N}^*$. On propose l'hypothèse :

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\big(2^n\sin(2x) + 2\cos(x)\big), & n \text{ pair} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\big(2^n\cos(2x) - 2\sin(x)\big), & n \text{ impair} \end{cases}$$

Démontrons cette formule par récurrence. L'initialisation est déjà achévée. Supposons que la formule est vraie pour tout $n \leq k \in \mathbb{N}^*$. Alors pour $n = k+1$ on a :
Si k est pair,

$$(f^{(k)})'(x) = (-1)^{\frac{k}{2}}\left(2^k \cdot 2\cos(2x) - 2\sin(x)\right) = (-1)^{\frac{(k+1)-1}{2}}\left(2^{k+1}\cos(2x) - 2\sin(x)\right) = f^{(k+1)}(x).$$

Si k est impair,

$$(f^{(k)})'(x) = (-1)^{\frac{k-1}{2}}\left(-2^n \cdot 2\sin(2x) - 2\cos(x)\right) = (-1)^{\frac{k+1}{2}}\left(2^{k+1}\sin(2x) + 2\cos(x)\right) = f^{(k+1)}(x).$$

Alors la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

iii) Comme $f'(x) = x^{-1}$, on peut utiliser le résultat de *i)* avec $m = -1$ pour obtenir $f^{(n)}$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f^{(n)}(x) = (f')^{(n-1)}(x) = (-1)(-2)(-3)\cdots(-(n-1))x^{-1-(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\,.$$

Exercice 2.

i) Le logarithme de f est

$$\ln\big(f(x)\big) = 2\ln(x^2+1) + 3\ln(x+2) + 5\ln(x-1),$$

et en dérivant par rapport à x on trouve

$$\Big(\ln\big(f(x)\big)\Big)' = \frac{4x}{x^2+1} + \frac{3}{x+2} + \frac{5}{x-1}.$$

Comme $\Big(\ln\big(f(x)\big)\Big)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, on obtient

$$\begin{aligned}
f'(x) &= f(x)\cdot\Big(\ln\big(f(x)\big)\Big)' = f(x)\left(\frac{4x}{x^2+1}+\frac{3}{x+2}+\frac{5}{x-1}\right)\\
&= f(x)\,\frac{4x(x+2)(x-1)+3(x^2+1)(x-1)+5(x^2+1)(x+2)}{(x^2+1)(x+2)(x-1)}\\
&= \frac{f(x)}{(x^2+1)(x+2)(x-1)}\Big(4x(x^2+x-2)+3(x^3-x^2+x-1)+5(x^3+2x^2+x+2)\Big)\\
&= (x^2+1)(x+2)^2(x-1)^4(12x^3+11x^2+7).
\end{aligned}$$

ii) On a

$$\ln\big(f(x)\big) = \sum_{k=1}^{11} k\ln\big(1+\sin^2(kx)\big)$$

et donc

$$\Big(\ln\big(f(x)\big)\Big)' = \sum_{k=1}^{11} k\,\frac{2k\sin(kx)\cos(kx)}{1+\sin^2(kx)} = \sum_{k=1}^{11}\frac{k^2\sin(2kx)}{1+\sin^2(kx)}\,.$$

Il s'en suit que

$$f'(x) = \Big(\ln\big(f(x)\big)\Big)'\cdot f(x) = \left(\sum_{k=1}^{11}\frac{k^2\sin(2kx)}{1+\sin^2(kx)}\right)\left(\prod_{k=1}^{11}\big(1+\sin^2(kx)\big)^k\right).$$

Exercice 3.

La dérivée de la fonction valeur absolue $g(x)=|x|$ étant connue pour tout $x\in\mathbb{R}_-^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$g'(x) = \begin{cases} 1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

La fonction g n'étant pas dérivable en $x=0$, ainsi

$$f'(x) = \begin{cases} 1+e^x, & x>0\\ -1+e^x, & x<0\end{cases}$$

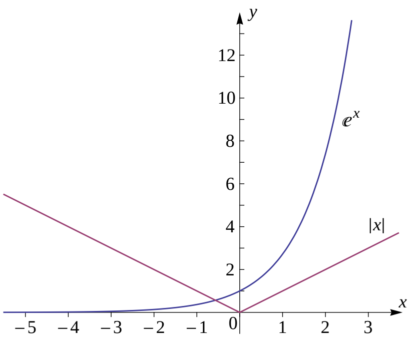
Notez que $f'(0)$ n'existe pas non plus.
Comme rappel, la Fig. 1 montre les graphiques des fonctions e^x et $|x|$. Les graphiques de f et f' sont donnés aux Fig. 2 et 3 respectivement.
Remarque : Les lignes hachurées dans les Fig. 2 et 3 sont les asymptotes à gauche de f et f' qui sont dues au fait que la fonction exponentielle admet une asymptote à gauche en $y=0$.

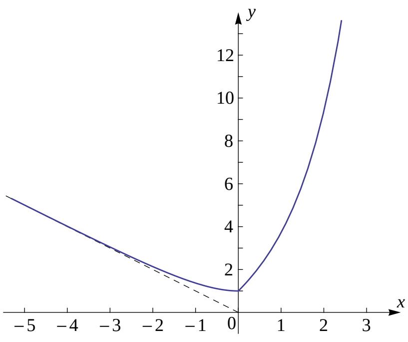
Exercice 4.

Rappel : La dérivée de la fonction réciproque f^{-1} de f est donnée par (cf. cours)

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}\,.$$

Toutes les fonctions f considérées sont des fonctions élémentaires injectives et dérivables sur les domaines donnés. Par un théorème du cours, la fonction réciproque f^{-1} est donc dérivable sur l'image de tout intervalle sur lequel f' ne s'annule pas.





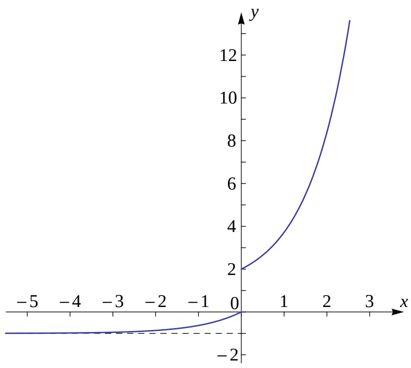


FIGURE 1 – e^x et $|x|$.

FIGURE 2 – $f(x)$.

FIGURE 3 – $f'(x)$.

i) $f^{-1}(x) = \arctan(x)\,, \quad D(f^{-1}) = \mathbb{R}.$

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}} = \cos^2(\arctan(x)) \stackrel{*}{=} \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

où il faut utiliser la trigonométrie pour obtenir l'expression en $\tan(x)$ à l'étape * :

$$\cos^2(x) = 1-\sin^2(x) = 1-\tan^2(x)\cos^2(x) \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2(x)\left(1+\tan^2(x)\right) = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos^2(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)}$$

Le domaine de la dérivée est $D((f^{-1})') = \mathbb{R}$.

ii) $f^{-1}(x) = \arccos(x)\,, \quad D(f^{-1}) = [-1,1].$

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

$D\left((f^{-1})'\right) = \left]-1,1\right[\,.$

iii) $f^{-1}(x) = \sqrt{x}\,, \quad D(f^{-1}) = \mathbb{R}_+, \quad f(x) = x^2.$

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,,$$

$D\left((f^{-1})'\right) = \mathbb{R}_+^*\,.$

iv) $f^{-1}(x) = x^{-\frac{1}{4}}\,, \quad D(f^{-1}) = \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x^{-4}.$

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = -\frac{1}{\frac{4}{\left(x^{-\frac{1}{4}}\right)^5}} = -\frac{x^{-\frac{5}{4}}}{4}\,,$$

$D\left((f^{-1})'\right) = \mathbb{R}_+^*\,.$

v) $f^{-1}(x) = -\ln(x)\,, \quad D(f^{-1}) = \left]0,\infty\right[\,.$

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{-e^{-(-\ln(x))}} = -\frac{1}{x}\,, \qquad D\left((f^{-1})'\right) = \left]0,\infty\right[\,.$$

vi) $f^{-1}(x) = -\log_2(x)\,, \quad D(f^{-1}) = \left]0,\infty\right[\,.$

On a $f'(x) = (2^{-x})' = \left(e^{-x\ln(2)}\right)' = -\ln(2)\,e^{-x\ln(2)} = -\ln(2)\,2^{-x}$

et donc $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{-\ln(2)\cdot 2^{-(-\log_2(x))}} = -\dfrac{1}{x\ln(2)}\,, \qquad D\left((f^{-1})'\right) = \left]0,\infty\right[\,.$

vii) $f^{-1}(x) = \operatorname{arsinh}(x)\,, \quad D(f^{-1}) = \mathbb{R}\,.$

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{arsinh}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,, \qquad D((f^{-1})') = \mathbb{R}.$$

viii) $f^{-1}(x) = \operatorname{arcosh}(x)\,,\quad D(f^{-1}) = \;[1,\infty[\,.$

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\sinh(\operatorname{arcosh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\operatorname{arcosh}(x))-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,,$$

$D((f^{-1})') = \,]1,\infty[\,.$

ix) $f^{-1}(x) = \operatorname{artanh}(x)\,,\quad D(f^{-1}) = \,]-1,1[\,.$

Comme $f'(x) = \left(\dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right)' = \dfrac{\cosh^2(x)-\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \dfrac{1}{\cosh^2(x)}$ on a

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2(\operatorname{artanh}(x))}} = \cosh^2(\operatorname{artanh}(x)) \overset{**}{=} \frac{1}{1-\tanh^2(\operatorname{artanh}(x))} = \frac{1}{1-x^2}\,,$$

où l'étape ** et due à

$$\cosh^2(x) = 1+\sinh^2(x) = 1+\tanh^2(x)\cosh^2(x) \quad\Leftrightarrow\quad \cosh^2(x)\left(1-\tanh^2(x)\right) = 1$$
$$\Leftrightarrow\quad \cosh^2(x) = \frac{1}{1-\tanh^2(x)}\,.$$

Le domaine de la dérivée est $D\big((f^{-1})'\big) = \,]-1,1[\,.$

Exercice 5.

i) Comme $\frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{24} = \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{24}$, on va considérer la fonction $f(x) = \tan(x)$ sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{24}\right]$, où elle est continue et dérivable. Le théorème des accroissements finis nous indique qu'il existe $c \in \left]\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{24}\right[$ tel que $\tan'(c) = \dfrac{\tan\left(\frac{5\pi}{24}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\pi}{24}}$.

En réarrangeant cette équation, nous obtenons

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{5\pi}{24}\right) &= \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{24}\tan'\left(\frac{\pi}{6}+\lambda\frac{\pi}{24}\right) \text{ où } \lambda \in]0,\,1[\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{24}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{6}+\lambda\frac{\pi}{24}\right)}\end{aligned}$$

Il ne nous reste plus qu'à borner le terme $\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{6}+\lambda\frac{\pi}{24}\right)}$:

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ étant croissante sur $\left]\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right[$, nous obtenons

$$\frac{4}{3} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)} \le \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{6}+\lambda\frac{\pi}{24}\right)} \le \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 2\,,$$

et ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{18} \le \tan\left(\frac{5\pi}{24}\right) \le \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{12}\,,$$

Il est à remarquer ici que l'encadrement obtenu est bien plus fin que si l'on avait simplement utilisé la croissance de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ sur $\left]\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right[$.

En effet, on obtient numériquement avec notre encadrement que

$$0.75188\ldots \leq \tan\left(\frac{5\pi}{24}\right) \leq 0.83914\ldots$$

alors que l'on aurait obtenu

$$0.57735\ldots = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) \leq \tan\left(\frac{5\pi}{24}\right) \leq \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1\,.$$

en utilisant la croissance de la fonction $x \mapsto \tan(x)$.

ii) (a) Pour que f soit bien définie, il faut et il suffit que les dénominateurs ne s'annulent pas.
Ainsi, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2,\, 4\}$.

(b) Par opérations usuelles, la fonction f est donc continue sur $]-2,\, 4[$.
De plus, nous avons

$$f(-1) = 1 - \frac{1}{5^5} > 0 \text{ et } f(3) = \frac{1}{5^3} - 1 < 0$$

Ainsi, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe $c \in]-1,\, 3[$ tel que $f(c) = 0$.

(c) Étudions la fonction f sur ses 3 domaines différents :

— $x < -2$:
$f(x)$ étant la somme de deux termes strictement négatifs, sa somme est strictement négative.
Il n'existe donc pas de réel $c \in]-\infty,\, -2[$ tel que $f(c) = 0$.

— $x > 4$:
De même, ici $f(x)$ est la somme de deux termes strictement positifs, sa somme est donc strictement positive.
Il n'existe donc pas de réel $c \in]4,\, +\infty[$ tel que $f(c) = 0$.

— $x \in]-2,\, 4[$:
Supposons par l'absurde qu'il existe $(c,\, d) \in]-2,\, 4[$ tel que $c < d$ (on peut sans perte d'information supposer cela et non le contraire) et $f(c) = f(d) = 0$.
Alors, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $e \in]c, d[$ tel que $f'(e) = 0$.
Or, pour tout $x \in]-2,\, 4[$

$$f'(x) = -\left(\frac{3}{(x+2)^4} + \frac{5}{(x-4)^6}\right) < 0$$

On aboutit donc à une contradiction. Et ainsi, l'équation $f(x) = 0$ possède une seule solution dans $\mathbb{R}$.

iii) La fonction $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x + s$ où $s \in \mathbb{R}$, est dérivable partout dans $\mathbb{R}$.
Supposons par l'absurde que f possède au moins 3 racines distinctes. Posons a, b et c trois d'entre elles telles que $a < b < c$.
Ainsi, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $(d,\, e) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f'(d) = f'(e) = 0$ et $d \neq e$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f'(x) = 12(x^3 - x^2 + x - 1) = 12(x-1)(x^2+1)$$

On voit très clairement que f' ne s'annule que pour $x = 1$ et on arrive donc à une contradiction.

Ainsi, f admet bien au plus 2 racines dans $\mathbb{R}$.

iv) Puisque $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors f est continue sur $[-3,\, 3]$ et dérivable sur $]-3,\, 3[$.

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $a \in]-3,\, 3[$ tel que

$$f'(a) = \frac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)} = 1$$

De même, le thèorème des accroissements finis nous indique qu'il existe $b \in]3,\, 10[$ tel que

$$f'(b) = \frac{f(10) - f(3)}{10 - 3} = 1$$

Ensuite, toujours car $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, nous avons que f' est continue sur $[a,\, b]$ et dérivable sur $]a,\, b[$. Donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a,\, b[$ tel que

$$f''(c) = \frac{f'(b) - f'(a)}{b - a} = 0$$

Exercice 6.

Afin de calculer les limites demandées, on applique la règle de Bernoulli-l'Hôpital (abrégée par BL) une fois qu'on a vérifié ses hypothèses.

i) Posons $f(x) = \ln(x-1)$ et $g(x) = x - 2$. Alors on a $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 0$ et $g'(x) = 1 \neq 0$. Les hypothèses de BL sont donc satisfaites et on a

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)}{x-2} \overset{\text{BL}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x-1}}{1} = 1.$$

ii) Ici, on doit utiliser la règle BL plusieurs fois. Pour la première fois on pose $f(x) = \tanh(x) - 1$ et $g(x) = \frac{1}{x}$. Comme $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ et $g'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0$, les hypothèses sont satisfaites. On peut donc appliquer BL une première fois (les hypothèses pour les étapes suivantes seront vérifiées ci-dessous) :

$$\lim_{x\to\infty} x\big(\tanh(x) - 1\big) = \lim_{x\to\infty} \frac{\tanh(x) - 1}{\frac{1}{x}} \overset{\text{BL}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\cosh(x)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\cosh^2(x)}$$

$$\overset{\text{BL}}{=} -\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sinh(2x)} \overset{\text{BL}}{=} -\lim_{x\to\infty} \frac{2}{2\cosh(2x)} = 0\,.$$

Pour la deuxième application de BL on a $\tilde{f}(x) = x^2$ et $\tilde{g}(x) = \cosh^2(x)$ on a $\lim\limits_{x\to\infty} \tilde{f}(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \tilde{g}(x) = \infty$ et $g'(x) = 2\sinh(x)\cosh(x) = \sinh(2x) \neq 0$ pour $x \neq 0$ (ce qui est bien le cas lorsque $x \to \infty$).

Finalement pour la troisième fois avec $\bar{f}(x) = 2x$ et $\bar{g}(x) = \sinh(2x)$ et donc $\lim\limits_{x\to\infty} \bar{f}(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \bar{g}(x) = \infty$ ainsi que $\bar{g}'(x) = 2\cosh(2x) \neq 0$. On a donc bien pu appliquer BL les trois fois.

Remarque : On peut aussi appliquer la règle de Bernoulli-L'Hôpital à la limite

$$\lim_{x\to\infty} x\big(\tanh(x)-1\big) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\frac{1}{\tanh(x)-1}}.$$

pour obtenir le même résultat.

iii) On a $\big(1+\sin(x)\big)^{1/x} = \exp\big(\frac{1}{x}\ln\big(1+\sin(x)\big)\big)$. On va donc d'abord calculer la limite de l'exposant. Posons $f(x)=\ln\big(1+\sin(x)\big)$ et $g(x)=x$. Alors $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} g(x) = 0$ et $g'(x) = 1 \neq 0$. Ainsi

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+\sin(x))}{x} \overset{\text{BL}}{=} \lim_{x\to0} \frac{\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}}{1} = 1\,,$$

et par conséquent

$$\lim_{x\to0} (1+\sin(x))^{1/x} = e^1 = e\,.$$

iv) Posons $f(x)=\tan(x)-\sin(x)$ et $g(x)=x-\sin(x)$.
Nous allons appliquer à plusieurs reprises la règle de Bernoulli l'Hôpital. Pour la première fois nous avons bien $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} \tan(x)-\sin(x) = 0-0 = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} g(x) = \lim\limits_{x\to0}(x-\sin(x)) = 0-0 = 0$, et $g'(x)\neq 0$ au voisinage de $x=0$. Ainsi, d'après la règle de Bernoulli l'Hôpital nous avons (nous vérifierons les prochaines étapes ci-dessous) :

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{BL}}{=} \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos^2(x)}-\cos(x)}{1-\cos(x)} \overset{\text{BL}}{=} \lim_{x\to0}\frac{2\frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}+\sin(x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to0}\left(\frac{2}{\cos^3(x)}+1\right) = 3$$

Pour la seconde étape de Bernoulli l'Hôpital, nous avons bien que $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{\cos^2(x)}-\cos(x)) = 1-1 = 0$ et $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos(x)) = 1-1 = 0$. La deuxième application de la règle de Bernoulli l'Hôpital était donc bien légitime.

v) $\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln(x)}\right) = \dfrac{x\ln(x)-x+1}{(x-1)\ln(x)}$.
Posons $f(x)=x\ln(x)-x+1$ et $g(x)=(x-1)\ln(x)$.
Nous allons appliquer à plusieurs reprises la règle de Bernoulli l'Hôpital. Pour la première fois nous avons bien $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1}(x\ln(x)-x+1) = 0-1+1 = 0$ et $\lim\limits_{x\to1} g(x) = \lim\limits_{x\to1}(x-1)\ln(x) = 0\times 0 = 0$, et $g'(x)\neq 0$ au voisinage de $x=1$. Ainsi, d'après la règle de Bernoulli l'Hôpital nous avons (nous vérifierons les prochaines étapes ci-dessous) :

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{BL}}{=} \lim_{x\to1}\frac{\ln(x)-1+1}{\ln(x)+1-\frac{1}{x}} \overset{\text{BL}}{=} \lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

Pour la seconde étape de Bernoulli l'Hôpital, nous avons bien que $\lim\limits_{x\to1}\ln(x)-1+1 = 0-1+1 = 0$ et $\lim\limits_{x\to1}(\ln(x)+1-\dfrac{1}{x}) = 0+1-1 = 0$, et la dérivée du dénominateur n'est pas zéro au voisinage de $x=1$. La deuxième application de la règle de Bernoulli l'Hôpital était donc bien légitime.

vi) On a que $x^{\pi x} = e^{\pi x\ln(x)}$ $(x>0)$. Calculons tout d'abord la limite de l'exposant.
Pour cela, posons $f(x)=\pi\ln(x)$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$.

Nous avons bien $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \pi\ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$. Ainsi, d'après la généralisation de la règle de Bernoulli l'Hôpital nous obtenons :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{BL}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\pi}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -\pi x = 0$$

Et donc

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\pi x} = 1$$

vii) Posons $f(x) = 1 - \cos(x)$ et $g(x) = \tan(x)$.
Nous avons bien $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(1-\cos(x)) = 1 - 1 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}\tan(x) = 0$. Ainsi, d'après la règle de Bernoulli l'Hôpital nous obtenons :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{BL}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = 0$$

viii) $\left(x\tan(x) - \dfrac{\pi}{2\cos(x)}\right) = \dfrac{2x\sin(x) - \pi}{2\cos(x)}$.
Posons $f(x) = 2x\sin(x) - \pi$ et $g(x) = 2\cos(x)$.
Nous avons bien $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(2x\sin(x) - \pi) = \pi - \pi = 0$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} 2\cos(x) = 2\times 0 = 0$. Ainsi, d'après la règle de Bernoulli l'Hôpital nous obtenons :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{BL}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} -\frac{\sin(x) + x\cos(x)}{\sin(x)} = -1$$

ix) Posons $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$.
Nous avons bien $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{3}} = +\infty$. Ainsi, d'après la généralisation de la règle de Bernoulli l'Hôpital nous obtenons :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{BL}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}} = \lim_{x\to+\infty} 3x^{-\frac{1}{3}} = 0$$

Exercice 7.

i) La fonction $f(x) = x\left(e^{1/x} - 1\right)$ est une fonction d'interpolation de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ donnée par $a_n = f(n)$, d'où $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ (si cette limite existe). En posant $y = \dfrac{1}{x}$, il s'ensuit que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{y\to 0^+} f\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to 0^+} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

ii) Comme au point *i)*, la fonction $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}$ est une fonction d'interpolation de la suite $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. On va d'abord calculer la limite de l'exposant en posant $y = \dfrac{1}{x}$:

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(1-y)}{y} \overset{\text{BL}}{=} \lim_{y\to 0^+} -\frac{1}{1-y} = -1\,,$$

où on a pu utiliser BL parce que $\lim_{y\to 0^+} \ln(1-y) = \lim_{y\to 0^+} y = 0$ et $y' = 1 \neq 0$.
Finalement, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{y\to 0^+} f\left(\frac{1}{y}\right) = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Exercice 8.

i) Avant de calculer ses dérivées, on récrit f en distinguant les deux cas. On a

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x+\frac{5}{4}\,, & -1 \le x \le -\frac{1}{4} \\ x^2-x+\frac{3}{4}\,, & -\frac{1}{4} < x \le 1 \end{cases}\,, \qquad f'(x) = \begin{cases} 2x+1\,, & -1 < x < -\frac{1}{4} \\ 2x-1\,, & -\frac{1}{4} < x < 1 \end{cases}$$

Puisque $|x+\frac{1}{4}|$ n'est pas dérivable en $x=-\frac{1}{4}$, la fonction f n'est pas dérivable en ce point. De plus $f''(x) = 2$ pour tout $x \in \left]-1,-\frac{1}{4}\right[\cup \left]-\frac{1}{4},1\right[$.
Les extremums locaux et absolus sont donc parmi les points suivants :

(*a*) Points stationnaires : $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$ ou $x_2 = \frac{1}{2}$. Comme $f''(x_1) = f''(x_2) > 0$, x_1 et x_2 sont des minimums locaux. On a $f(x_1) = 1$ et $f(x_2) = \frac{1}{2}$.

(*b*) Points où f' n'existe pas : Le seul point à examiner est $x_0 = -\frac{1}{4}$ On déduit des signes de f' au voisinage de x_0 que x_0 est un maximum local. On a $f(x_0) = \frac{17}{16}$.

(*c*) Extrémités du domaine de f : Comme f est continue sur $[-1,1]$, on déduit des signes de f' au voisinage des extrémités (négatif vers -1 et positif vers 1) que f a des maximums locaux en $a=-1$ et $b=1$. On a $f(a) = \frac{5}{4}$ et $f(b) = \frac{3}{4}$.

$$(a),\ (b),\ (c) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{maximum global en} & x=-1, \quad f(-1) = \frac{5}{4} \\ \text{minimum global en} & x = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{(cf. Fig. 4)}$$

ii) Comme $2-x < 0$ pour tout $x \in]2,3[=: I$, il ne faut pas distinguer deux cas pour f. On a en effet

$$f(x) = (x-1)^2 + 2(2-x) = x^2 - 4x + 5 \quad \text{et} \quad f'(x) = 2(x-2) \quad \text{pour tout } x \in I$$

Les extremums locaux et globaux se trouvent de nouveau parmi les points suivants :

(*a*) Points stationnaires : $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, donc aucun.

(*b*) Points où f' n'existe pas : f' existe sur tout I, donc aucun.

(*c*) Extrémités du domaine de f : Le domaine I est un intervalle ouvert et n'a donc pas d'extrémités.

Ainsi la fonction f ne possède ni d'extremum local ni absolu sur I (cf. Fig. 5).

Exercice 9.

Q1 : VRAI.
Résultat du cours (voir DZ § 5.2.16).
Preuve : Soient $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$. Par le théorème des accroissements finis il existe $u \in]x_1,x_2[$ tel que $f(x_2) - f(x_1) = f'(u)(x_2-x_1)$. Puisque $f'(u) \geq 0$ il suit que $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, c.-à-d. f est croissante.

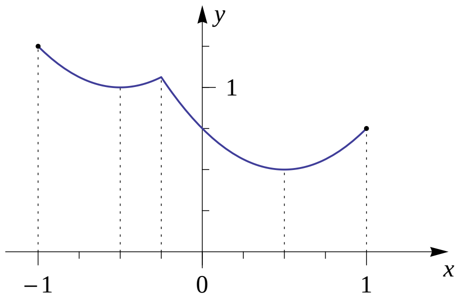


FIGURE 4 – Ex. 6(i)

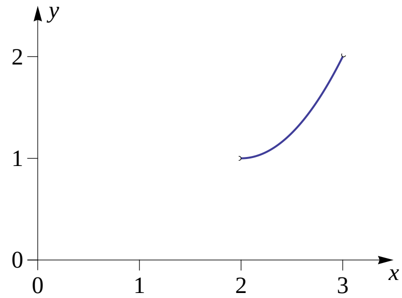


FIGURE 5 – Ex. 6(ii)

Q2 : VRAI.
Pour tout $x \in \,]a, b[$, la dérivée de f est par définition

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \, .$$

Comme f est croissante sur $[a, b]$, $f(x+h) - f(x)$ est du même signe que h. Ainsi le quotient dans la limite est toujours positif et donc $f'(x) \geq 0$.

Q3 : FAUX.
Prendre par exemple $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. Cette fonction est strictement croissante sur $[-1, 1]$ mais $f'(0) = 0$.

Q4 : VRAI.
Résultat du cours (voir DZ § 5.2.16). Preuve comme à la Q1 en remplaçant $\geq$ par $>$.

Q5 : FAUX.
Prendre par exemple $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. Alors f a une tangente horizontale en $c = 0$ car $f'(0) = 0$ mais elle n'admet pas d'extremum en ce point car pour tout $\varepsilon > 0$ on a $f(-\varepsilon) = -\varepsilon^3 < f(0) = 0 < \varepsilon^3 = f(\varepsilon)$.