EPFL
Sections IN, SC

Anna Lachowska
21 novembre 2024

Analyse I – Corrigé de la Série 10

Exercice 1.

Q1) : VRAI.
Le résultat est évident si $f(I)$ est réduit à un point. Sinon, soient y_1 et y_2 deux éléments de $f(I)$ avec $y_1 < y_2$. Il existe x_1 et x_2 dans I tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, tout élément de $[f(x_1), f(x_2)]$ est l'image d'un élément de $[x_1, x_2]$ ou de $[x_2, x_1]$ et donc $[y_1, y_2] = [f(x_1), f(x_2)] \subset f(I)$ qui est un intervalle.

Q2) : VRAI.
par le théorème de la valeur intermédiaire démontré dans le cours, voir DZ 4.3.22.

Q3) : FAUX.
Prendre par exemple $I =]0, 1]$ et f comme suit

$$\begin{array}{cccc} f & : &]0,\,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

On a alors

$$\lim_{x \to 0} = +\infty$$

Q4) : FAUX.
Il suffit de prendre f une fonction constante pour s'en convaincre.

Q5) : FAUX.
D'après Q3)

Q6) : FAUX.
Posons

$$\begin{array}{ccccc} f & : & [a,\,b[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{x-b}\right)}{x-b} \end{array}$$

Cette fonction n'atteint jamais son maximum et minimum (qui sont d'ailleurs infinis).

Q7) : FAUX.
Si l'on pose

$$\begin{array}{ccccc} f & : & [a,\,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x\sin(x) \end{array}$$

f n'atteint ni son minimum ni son maximum puisque la fonction n'est pas bornée.

Q8) : VRAI.
f étant continue, nous avons $f(I)$ un intervalle.
Supposons que $y_0 \in f(I)$. Alors il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = y_0$. Puisque I est ouvert, il existe $a > 0$ tel que $[x_0 - a, x_0 + a] \in I$, et comme f est continue et strictement croissante, on a $[f(x_0 - a), f(x_0 + a)] \subset f(I)$. Alors pour tout point $y_0 \in f(I)$ il existe un intervalle $]f(x_0 - a), f(x_0 + a)[\subset f(I)$ qui contient y_0, et donc $f(I)$ est un intervalle ouvert.

Exercice 2.

i) Comme l'expression de f n'est pas définie en $x=1$, on doit calculer sa limite en ce point. Pour $x \neq 1$, on peut écrire, en utilisant a que $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3}} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}}\right)\\ &= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1-x}{2(x-1)}\cdot\frac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

et donc le prolongement par continuité de f est

$$\tilde{f}\colon [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\qquad \tilde{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3}}\,, & x\neq 1\\ -\dfrac{\sqrt{6}}{4}\,, & x=1\end{cases}$$

Remarque : Le prolongement par continuité s'écrit en fait aussi sans distinction de cas :

$$\tilde{f}\colon [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\qquad \tilde{f}(x)=-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}}.$$

ii) Comme l'expression de f n'est pas définie pour $x\in A\cup\{0\}$, il faut passer aux limites. Pour ceci, remarquons qu'on obtient pour $x\notin A\cup\{0\}$ avec un peu de trigonométrie

$$\tan\left(\frac{1}{x}\right)\left(1-\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\tan\left(\frac{1}{x}\right)\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Soit $a_n=\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^{-1}\in A$. Alors on a

$$\lim_{x\to a_n} f(x)=\lim_{x\to a_n}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)=(-1)^n\cdot 0=0,$$

c'est-à-dire f peut être prolongée par continuité pour tout $a\in A$. Pour $x=0$ on a (en utilisant la formule $2\sin(t)\cos(t)=\sin(2t)$) :

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2}{x}\right)\quad\text{qui n'existe pas.}$$

Comme la limite $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas, f ne peut être prolongé par continuité en $x=0$. Le prolongement par continuité de f est donc

$$\tilde{f}\colon]0,1]\longrightarrow\mathbb{R},\qquad \tilde{f}(x)=\begin{cases}\tan\left(\frac{1}{x}\right)\left(1-\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\right), & x\notin A\\ 0, & x\in A\end{cases}$$

ou, sans séparation des cas, $\tilde{f}\colon]0,1]\to\mathbb{R}$, $\tilde{f}(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

iii) L'expression de f n'étant pas définie pour $x = 1$, on veut calculer la limite. Comme le dénominateur de f s'écrit $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$ on a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)\tan(x-1)}{x^3-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)\tan(x-1)}{(x-1)^2(x+2)} \\
&= \lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x+2} \cdot \frac{\tan(x-1)}{x-1} \right) = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x+2} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{\tan(x-1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x}{x+2} \cdot \lim_{x\to 1} \left(\frac{\sin(x-1)}{(x-1)} \cdot \frac{1}{\cos(x-1)} \right) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

(*Attention :* La décomposition en produit de deux limites à la deuxième ligne est valable parce que les deux limites existent.)
Ainsi le prolongement par continuité de f est

$$\tilde{f} \colon [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x-1)\tan(x-1)}{x^3-3x+2}, & x > 1 \\ \frac{1}{3}\ , & x = 1 \end{cases}$$

Notez que ce prolongement par continuité ne s'écrit pas sans séparation des cas.

Exercice 3.

i) On a $f(-x) = f(x)$. En dérivant les deux membres de cette égalité, on obtient $-f'(-x) = f'(x)$, c'est-à-dire f' est impaire.

ii) On dérive $f(-x) = -f(x)$ pour obtenir $-f'(-x) = -f'(x) \;\Leftrightarrow\; f'(-x) = f'(x)$. Ainsi f' est paire.

iii) Pour f périodique, il existe $T > 0$ tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En dérivant, on a $f'(x+T) = f'(x)$ et donc f' est aussi périodique.

Exercice 4.

i) $f'(x) = \dfrac{5(3x^2-1) - 6x(5x+2)}{(3x^2-1)^2} = -\dfrac{15x^2+12x+5}{(3x^2-1)^2}\ ; \quad D(f) = D(f') = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$

ii) $f'(x) = \dfrac{2x\sqrt{1-x^2} - x^2 \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{1-x^2} = \dfrac{x(2-x^2)}{(1-x^2)^{3/2}}\ ; \quad D(f) = D(f') =]-1,1[$

iii) $$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sin(x)\cos(x) \cdot \cos(x^2) + \sin(x)^2 \cdot \big(-\sin(x^2)\big) \cdot 2x \\ &= 2\sin(x)\big[\cos(x)\cos(x^2) - x\sin(x)\sin(x^2)\big]\ ; \qquad D(f) = D(f') = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

iv) En appliquant la règle de dérivation d'un quotient à $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, on obtient

$$f'(x) = \frac{\cos(x)^2 - \sin(x) \cdot \big(-\sin(x)\big)}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

et donc $D(f) = D(f') = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) = 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

v) Il s'agit de plusieurs composées de fonctions. Donc

$$\begin{aligned} f'(x) =& \frac{1}{2\cdot\sqrt{\sin\Big(\sqrt{\sin(x)}\Big)}}\cos\Big(\sqrt{\sin(x)}\Big)\,\frac{1}{2\cdot\sqrt{\sin(x)}}\cos(x) \\ =& \frac{\cos\Big(\sqrt{\sin(x)}\Big)\cos(x)}{4\cdot\sqrt{\sin\Big(\sqrt{\sin(x)}\Big)}\cdot\sqrt{\sin(x)}}\,. \end{aligned}$$

Le domaine de f est

$$D(f) = \Big\{x\in\mathbb{R} : \sin(x)\geq 0 \text{ et } \sin\Big(\sqrt{\sin(x)}\Big)\geq 0\Big\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\big[2k\pi,(2k+1)\pi\big]\,.$$

En effet, $\sin(x)\geq 0 \;\Leftrightarrow\; x\in\big[2k\pi,(2k+1)\pi\big]$ et pour ces valeurs, on a $\sqrt{\sin(x)}\in[0,1]$ si bien que $\sin\Big(\sqrt{\sin(x)}\Big)\geq 0$, c'est-à-dire f est bien définie.
Pour le domaine de f', il faut encore exclure les points où $\sin(x)=0$, c'est-à-dire

$$D(f') = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\big]2k\pi,(2k+1)\pi\big[\,.$$

vi) $f'(x) = \frac{3}{5}\left(2x^4+e^{-(4x+3)}\right)^{-2/5}\left(8x^3-4e^{-(4x+3)}\right) = \dfrac{12\left(2x^3-e^{-(4x+3)}\right)}{5\sqrt[5]{\left(2x^4+e^{-(4x+3)}\right)^2}}$;

$D(f)=D(f')=\mathbb{R}$ (Le dénominateur de f' ne s'annule jamais parce que $e^{-(4x+3)}>0$ et $x^4\geq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.)

vii) En appliquant la formule de dérivation pour les fonctions composées

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\ln(3)\log_2(x)}\times\frac{1}{x\,\ln(2)} \\ &= \frac{1}{\ln(3)\ln(2)\,x\,\log_2(x)} \\ &= \frac{1}{\ln(2)\ln(3)\,x}\cdot\frac{\ln(2)}{\ln(x)} = \frac{1}{\ln(3)x\ln(x)} \end{aligned}$$

Alors, $D(f)=]1,\infty[$ et $D(f')=\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$

viii) En observant que $f(x)=\sin(x)\ln(4)\,e^{\cos(4x)}$, on obtient

$$\begin{aligned} f'(x) =& \ln(4)\cos(x)\,e^{\cos(4x)}+\ln(4)\sin(x)\cdot\big(-4\sin(4x)\big)\cdot e^{\cos(4x)} \\ =& \ln(4)\,e^{\cos(4x)}\Big(\cos(x)-4\sin(x)\sin(4x)\Big). \end{aligned}$$

$D(f)=D(f')=\mathbb{R}$

ix) Avant d'utiliser la formule de la dérivation d'un quotient, posons séparément les fonctions numérateur et dénominateur

$$\begin{array}{rccc} n & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & 3^x\cos(x) \end{array}$$

$$
\begin{array}{rcccc}
d & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\
 & & x & \mapsto & 2^{\sqrt{x^2+1}}
\end{array}
$$

$$n'(x) = \ln(3)3^x\cos(x) - 3^x\sin(x)$$

et

$$d'(x) = \ln(2)2^{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

On peut ainsi calculer plus aisément $f'(x)$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\left(\ln(3)3^x\cos(x) - 3^x\sin(x)\right)2^{\sqrt{x^2+1}} - \left(\ln(2)2^{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)3^x\cos(x)}{2^{2\sqrt{x^2+1}}} \\
&= \frac{\ln(3)3^x\cos(x) - 3^x\sin(x) - \ln(2)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}3^x\cos(x)}{2^{\sqrt{x^2+1}}} \\
&= 3^x\frac{\cos(x)\left(\ln(3) - \ln(2)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) - \sin(x)}{2^{\sqrt{x^2+1}}}
\end{aligned}
$$

On a $D(f) = D(f') = \mathbb{R}$

Exercice 5.

i) Pour $m \leq 0$, f n'est pas continue en $x = 0$ et donc pas dérivable non plus. En effet, on a

$$
\begin{aligned}
&\text{pour } m = 0 : &&\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} f(x) = \sin(1) \neq 0 = f(0), \\
&\text{pour } m \leq -1 : &&\lim_{x\to0} \sin\left(\frac{1}{x^{|m|}}\right) \text{ n'existe pas.}
\end{aligned}
$$

Pour $m \geq 1$, f est continue en $x = 0$ (car $\sin(0) = 0$) et sa dérivée en ce point est

$$f'(0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0}\frac{\sin(x^m)}{x} = \left(\lim_{x\to0} x^{m-1}\right)\cdot\underbrace{\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^m)}{x^m}\right)}_{=1} = \begin{cases} 1\,, & m = 1 \\ 0\,, & m \geq 2 \end{cases}$$

Ainsi f est dérivable en $x = 0$ pour tout $m \geq 1$.
La dérivée de f pour $x \neq 0$ est $f'(x) = mx^{m-1}\cos(x^m)$ et donc pour $m \geq 1$,

$$\lim_{x\to0} f'(x) = \left\{\begin{array}{ll} 1\,, & m = 1 \\ 0\,, & m \geq 2 \end{array}\right\} = f'(0).$$

Ainsi f' est continue en $x = 0$ pour tout $m \geq 1$.

ii) On a

$$f'(0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0} x^{m-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} 0, & \text{si } m \geq 2 \\ \text{n'existe pas}, & \text{si } m \leq 1 \end{cases}$$

Donc f admet une dérivée au point $x = 0$ si et seulement si $m \geq 2$ et on va seulement considérer ce cas ci-après.

La dérivée pour $x \neq 0$ est donnée par

$$f'(x) = mx^{m-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{m-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Pour $m = 2$, la limite $\lim_{x\to 0} f'(x)$ n'existe pas car $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas (cf. Ex. 6*iii* Série 9). Ainsi f' existe partout mais n'est pas continue en $x = 0$ dans ce cas.
Pour $m \geq 3$, la limite existe et on a $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$. Donc f' est continue en $x = 0$.

Exercice 6.

(a) En tant que fonction polynomiale, f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Il reste donc à étudier la dérivabilité de f en $x = 1$.
Une condition nécessaire pour la dérivabilité en $x = 1$ est la continuité en ce point, c'est-à-dire,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \beta = 3. \tag{1}$$

La fonction f est dérivable en $x = 1$ si les dérivées à gauche et à droite en ce point sont égales.

$$f'_{\text{gauche}}(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-x+3-3}{x-1} = \lim_{x\to 1} x = 1$$

$$f'_{\text{droite}}(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\alpha x+\beta-3}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\alpha x - \alpha + \overbrace{\alpha+\beta}^{=3 \text{ par } (1)} - 3}{x-1} = \alpha,$$

Donc $f'_{\text{gauche}}(1) = f'_{\text{droite}}(1) \;\Leftrightarrow\; \alpha = 1$. Il suit alors de (1) que $\beta = 2$.
Ainsi la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3\,, & x \leq 1 \\ \alpha x + \beta\,, & x > 1 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha = 1$ est $\beta = 2$.

(b) Une condition nécessaire pour la dérivabilité en $x = 0$ est la continuité en ce point.
4 cas se présentent selon α :

1) $\alpha = 0$:

$$\left|x^\alpha \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = \left|\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

2) $\alpha \geq 1$:

$$\left|x^\alpha \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x^\alpha| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

3) $\alpha = -1$:

$$\left|x^\alpha \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|$$

Or

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Mais

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ n'a pas de limite en } 0$$

Ainsi, d'après les propriétés des limites, on a que $\left|x^\alpha \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|$ n'a pas de limite en 0 pour $\alpha = -1$.

4) $\alpha \leq -2$:

$$\left|x^\alpha \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = \left|\frac{1}{x^{-\alpha-1}}\right| \left|\frac{\sin(x)}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \text{ où } -\alpha-1 \geq 1$$

La suite $a_n = \frac{1}{2\pi n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ nous donne la limite $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 0$, et la suite $b_n = \frac{1}{\pi/2+2\pi n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ est telle que la suite $|f(b_n)|$ n'est pas bornée lorsque n tend vers l'infini. Alors $\left|x^\alpha \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|$ n'a pas de limite en 0 pour $\alpha \leq -2$.

Finalement, f ne peut être continue que si $\alpha \geq 0$ et $\beta = 0$. Posons une fonction auxiliaire g

$$g(x) = \begin{cases} \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $\forall x \neq 0$:

$$g'(x) = \cos(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \sin(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}$$

On remarque que pour $\alpha = 0$, $f(x) = g(x)$. Étudions donc la valeur de la dérivée en 0 de g

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Cette dernière limite n'existe pas puisque $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas. Et ainsi, f n'est pas dérivable en $x = 0$ si $\alpha = 0$.
Posons maintenant $\alpha \geq 1$, $\forall x \neq 0$ on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha x^{\alpha-1}g(x) + x^\alpha g'(x) \\ &= \alpha x^{\alpha-1}\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^\alpha\left(\cos(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \sin(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}\right) \\ &= x^{\alpha-1}\left(\alpha\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x\cos(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\sin(x)}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \end{aligned}$$

ce qui est une fonction bien définie et continue pour tout $x \neq 0$. Étudions donc la dérivabilité de f en 0 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^\alpha\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x} = \lim_{x\to 0}x^{\alpha-1}\left(\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$$

pour tout $\alpha \geq 1$, car on a déjà vu que $\lim\limits_{x\to 0}\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Finalement, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour $\beta = 0$ et tout $\alpha \geq 1$, avec la dérivée continue sur $\mathbb{R}^*$.
Enfin pour étudier la continuité de la dérivée f' en $x = 0$, on calcule la limite

$$\lim_{x\to 0}f'(x) = \lim_{x\to 0}x^{\alpha-1}\left(\alpha\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x\cos(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\sin(x)}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

En utilisant que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| \leq 1,\ |\cos(x)| \leq 1,\ |\sin(x)| \leq |x| \text{ et } \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

On trouve que les deux premiers termes du membre entre parenthèses tendent vers 0 mais que le dernier terme n'a pas de limite en 0 mais est borné en valeur absolue par 1.
Ainsi, si $\alpha = 1$, f' n'a pas de limite en 0.
Si $\alpha \geq 2$, on a pour le dernier terme $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \left(x^{\alpha-1}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1 \cdot 0 = 0$, donc $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$, et la dérivée f' est continue en $x = 0$.
Donc $f'(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour $\beta = 0$ et tout $\alpha \geq 2$.

Exercice 7.
Comme on a $(g \circ f)'(0) = g'(f(0)) \cdot f'(0)$, il faut calculer les dérivées de f et g dans les points concernés.

i) Pour calculer $f'(x)$, écrivons $f(x) = 2x + 3 + (e^x - 1)\,u(x)$ où $u(x) = \sin(x)^7\cos(x)^4$. Alors

$$f'(x) = 2 + e^x\,u(x) + (e^x - 1)\,u'(x) \quad \text{ et } \quad u'(x) = 7\sin(x)^6\cos(x)^5 - 4\sin(x)^8\cos(x)^3.$$

Ainsi $u(0) = u'(0) = 0$ et donc $f'(0) = 2$.

Ensuite on a $g'(x) = \dfrac{3\ln(x)^2}{x}$. Puisque $f(0) = 3$ on trouve finalement

$$(g \circ f)'(0) = g'(3) \cdot f'(0) = \frac{3\ln(3)^2}{3} \cdot 2 = 2\ln(3)^2.$$

ii) Pour calculer $f'(0)$, il faut utiliser la définition de la dérivée :

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2x - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \left(x\sin\left(\tfrac{1}{x}\right) + 2\right) = 2$$

car $\lim_{x\to 0} \left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$ comme on a montré dans le cours.
Comme $g'(x) = 4(x-1)^3$ et $f(0) = 0$, on obtient

$$(g \circ f)'(0) = g'(0) \cdot f'(0) = (-4) \cdot 2 = -8.$$

Exercice 8.

Q1 : FAUX.
Prendre par exemple $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$. Cette fonction est continue en $x = 0$ parce qu'on a

$$0 \leq f(x) \leq x^2$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il suit par le théorème des deux gendarmes que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.
Par contre f n'est pas continue ailleurs qu'en 0. En effet, soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'intervalle ouvert $\left]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right[$ contient des nombres rationnels et irrationnels. En prenant $a_n \in \left]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right[\cap \mathbb{Q}$ et $b_n \in \left]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right[\cap (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ pour chaque

$n \in \mathbb{N}^*$, on obtient deux suites $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ et $(b_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ qui convergent les deux vers x_0 quand $n \to \infty$. Mais

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n^2 = x_0^2 > 0 = \lim_{n\to\infty} f(b_n),$$

et donc f n'est pas continue en x_0.
Pour voir que f est dérivable en $x = 0$, observer que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

et ainsi $-|x| \leq \frac{f(x)}{x} \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De nouveau par le théorème des deux gendarmes on conclut que

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0\,.$$

Q2 : FAUX.
Prendre par exemple $f(x) = |x|$ qui n'est pas dérivable en 0 (cf. contre-exemple du § 5.3 du cours). Les dérivées unilatérales en 0 existent mais elles ne sont pas égales.

Q3 : FAUX.
Prendre par exemple la fonction f de l'Ex. 7, $f(x) = \begin{cases} x \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$.
Alors f est dérivable sur $]-1, 1[$ (en fait sur $\mathbb{R}$) mais sa dérivée n'est pas continue en 0 (cf. Ex. 7).

Q4 : FAUX.
En prenant $f(x) = x$, on a $g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ qui n'est pas dérivable en 0 (cf. cours).

Q5 : FAUX.
En posant $f = e^x$, on sait que $f^{-1} = \ln(x)$.
Or

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{x} \neq \frac{1}{e^x}$$

En général, on connaît la vraie expression de la dérivée d'une fonction réciproque

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Q6 : FAUX.
La formule pour la dérivée de la fonction réciproque est $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.
Ici on a $f'(x) = 1 + e^x$ et $f^{-1}(1) = 0$ puisque $f(0) = 1$. Ainsi

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}\,.$$

Q7 : FAUX.
En posant $f(x) = -|x + 3|$, f est dérivable en $x = 0$, puisque $f(x) = -x - 3$ pour $x \geq -3$.
Or

$$f \circ f(x) = -|-|x+3|+3| = \begin{cases} -|-x-3+3| = -|x|, & x \geq -3 \\ -|x+3+3| = -|x+6|, & x < -3 \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas dérivable en $x = 0$.

Q8 : VRAI.

Puisque f est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $f'(a) = 0$, on a

$$(f \circ f \circ f \circ f \circ f)'(a) = f'(f(f(f(f(a))))) f'(f(f(f(a)))) f'(f(f(a))) f'(f(a)) f'(a) = 0.$$