EPFL
Sections IN, SC

Anna Lachowska
12 septembre 2024

Analyse I – Corrigé de la Série 1

Partie I : Algèbre.

1. *a)* 81 *b)* -81 *c)* $\dfrac{1}{81}$ *d)* 25 *e)* $\dfrac{9}{4}$ *f)* $\dfrac{1}{8}$

2. *a)* $6\sqrt{2}$ *b)* $48a^5b^7$ *c)* $\dfrac{x}{9y^7}$

3. *a)* $11x-2$ *b)* $4x^2+7x-15$ *c)* $a-b$ *d)* $4x^2+12x+9$
e) $x^3+6x^2+12x+8$ *f)* a^2+1

4. *a)* $(2x-5)(2x+5)$ *b)* $(2x-3)(x+4)$ *c)* $(x-3)(x-2)(x+2)$
d) $x(x+27)$ *e)* $3x^{-1/2}(x-1)(x-2)$ *f)* $xy(x-2)(x+2)$

5. *a)* $\dfrac{x+2}{x-2}$ *b)* $\dfrac{x-1}{x-3}$ *c)* $\dfrac{1}{x-2}$ *d)* $-(x+y)$

6. *a)* $5\sqrt{2}+2\sqrt{10}$ *b)* $\sqrt{9+h}-3$

7. La réponse est a^pb^q dans tous les cas.

8. *a)* $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ *b)* $2(x-3)^2-7$

9. *a)* $x=6$ *b)* $x=1$ *c)* $x_1=-3$ et $x_2=4$ *d)* $x_{1,2}=-1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
e) $x_{1,2}=\pm 1$ et $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$ *f)* $x_1=\frac{22}{3}$, $x_2=\frac{2}{3}$ *g)* $x=\frac{12}{5}$

10. *a)* $x\in[-4,3[$ *b)* $x\in\,]-2,4[$ *c)* $x\in\,]-2,0[\,\cup\,]1,\infty[$ *d)* $x\in\,]1,7[$
e) $x\in\,]-1,4]$

11. *a)* Faux. *b)* Vrai. *c)* Faux. *d)* Faux. *e)* Vrai. *f)* Faux.
g) Vrai. *h)* Vrai.

12. Les indications ci-après ne sont bien sûr pas les seules manières de vérifier les identités.

a) Commencer par la partie droite.

b) Pour la partie gauche, ne pas développer la somme parce qu'elle devient télescopique après la multiplication. Pour la partie droite, utiliser la troisième identité remarquable. Le résultat est $1-a^8$.

13. On trouve $A=b^{2m(2m-1)}$. Pour $b=2$, on obtient à partir de $2^{2m(2m-1)}=16^5$ que $m(2m-1)=10$. Comme m doit être entier, la seule possibilité est $m=-2$.

Partie II : Trigonométrie.

1. *a)* $\frac{5\pi}{3}$ *b)* $-\frac{\pi}{10}$

2. *a)* $150°$ *b)* $\frac{360°}{\pi}\approx 114.6°$

3. 2π cm

4. *a*) $-\frac{1}{2}$ *b*) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ *c*) $\sqrt{3}$

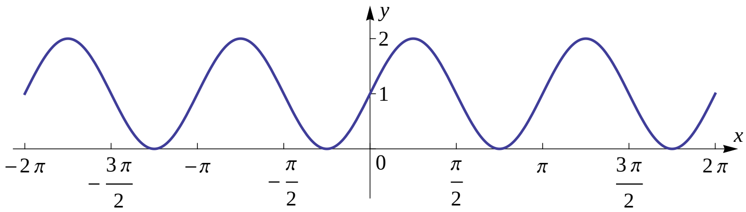
5. $a = 24\sin(\theta), \;\; b = 24\cos(\theta)$

6. $\frac{1}{15}(4 + 6\sqrt{2})$

7. Développer les parties gauches en utilisant la définition de la fonction tan.

8. $x \in \{0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\}$

9.



Partie III : Fonctions réelles.

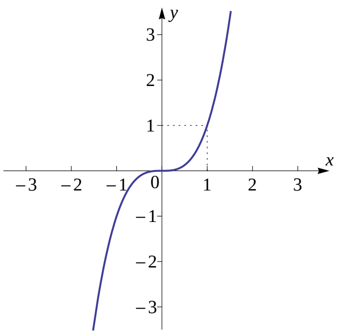
1. *a*) -2 *b*) 3 *c*) $-3,\ 1$ *d*) $-2,\ 0$ *e*) Domaine $[-3, 3]$, image $[-2, 3]$

2. $12 + 6h + h^2$

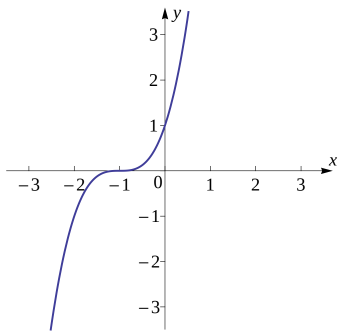
3. *a*) $]-\infty, -2[\, \cup \,]-2, 1[\, \cup \,]1, \infty[$ *b*) $[0, \infty[$ [1] *c*) $]-\infty, -1] \cup [1, 4]$

4. *a*) Réflexion par rapport à l'axe Ox.
b) Etirement vertical de facteur 2, suivi d'une translation d'une unité vers le bas.
c) Translation de trois unités vers la droite, puis de deux unités vers le haut.

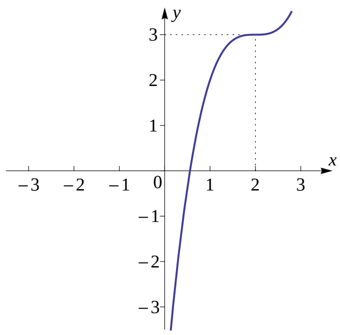
5. *a*)



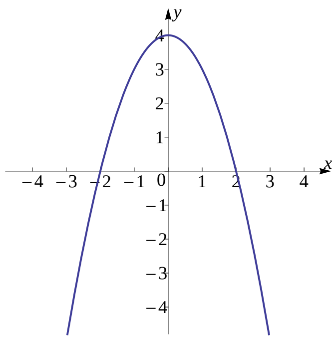
b)



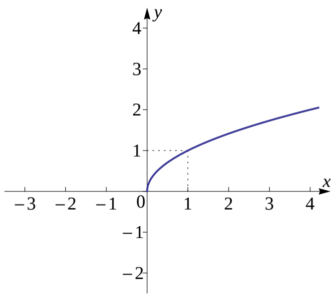
c)



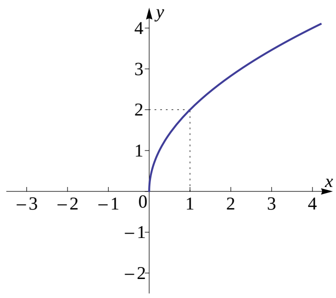
d)



e)

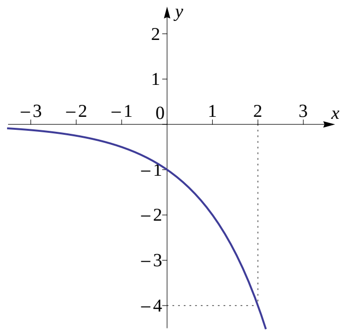


f)

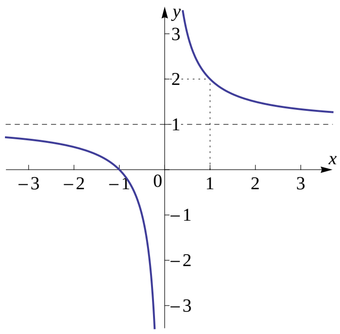


1. Dans [DZ, 6.4], les puissances avec exposants arbitraires non-entiers sont définies seulement pour les nombres strictement positifs. Mais dans le cas $f(x) = x^{1/n}$, n naturel positif, on peut la définir comme la fonction réciproque de $g(x) = x^n$ sur $[0, \infty[$. Avec cette définition on a $D(f) = [0, \infty[$.

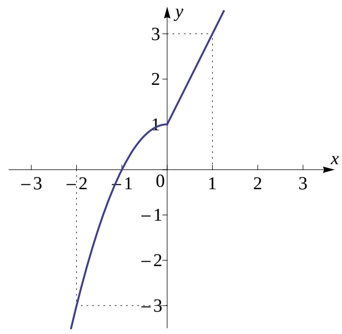
g)



h)



6. *b*)



6. *a*) $f(-2) = -3, \;\; f(1) = 3$ *b*) Ci-dessus (à la fin de l'Ex. 5).

7. *a*) $4x^2 - 8x + 2$ *b*) $2x^2 + 4x - 5$ *c*) $8x - 21$

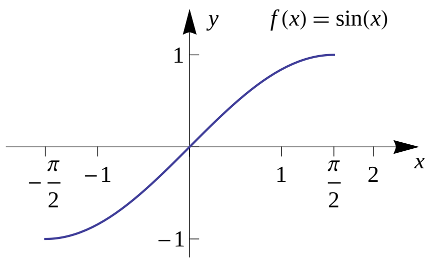
8. La réponse est $a^p b^q$ dans tous les cas.

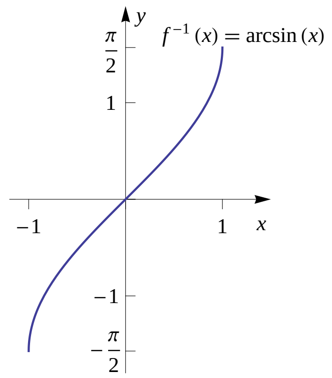
9. *Remarques générales (ou plutôt rappel) :*

— Le domaine $D(f^{-1})$ de la fonction réciproque f^{-1} est l'image de f. En effet, I a été choisi pour que f soit inversible entre I et son image.

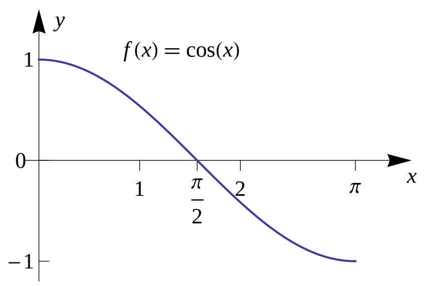
— Une fois qu'on a tracé le graphe de f, on peut trouver le graphe de f^{-1} géométriquement en faisant une réflexion par rapport à la droite $y = x$.

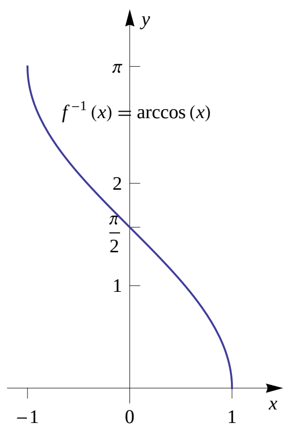
a) $D(f^{-1}) = [-1, 1]$





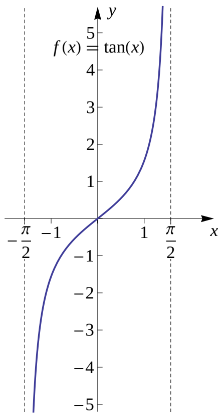
b) $D(f^{-1}) = [-1, 1]$

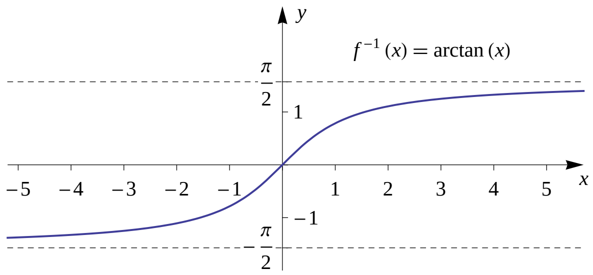




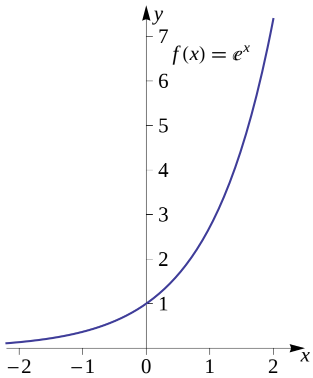
Tourner la page pour les exercices restants...

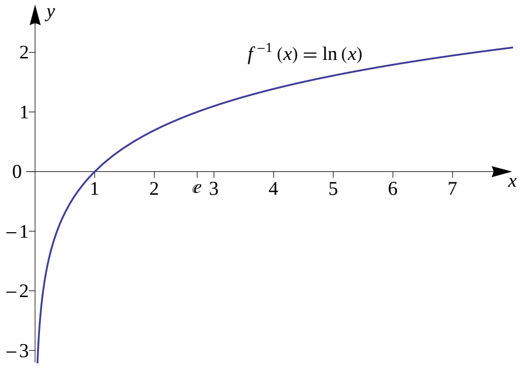
c) $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$



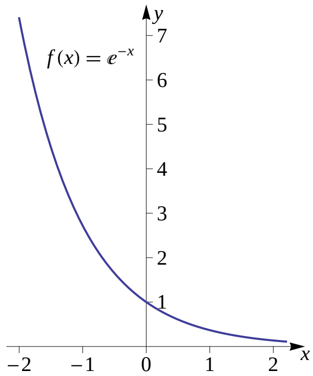


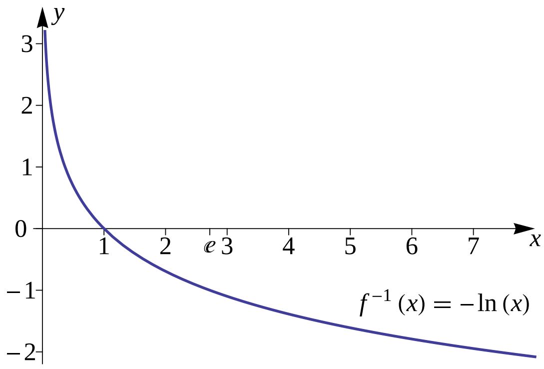
d) $D(f^{-1}) =]0, \infty[$





e) $D(f^{-1}) =]0, \infty[$





f) $D(f^{-1}) =]0, \infty[$