



T. Schmid
Analysis I - (n/a)
15 Januar 2024
3 Stunden 30 Minuten

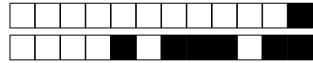
n/a

SCIPER: 999999

Drehen Sie diese Seite nicht um, bevor Sie dazu aufgefordert werden. Jedes Blatt hat eine Vorder- und eine Rückseite. Es gibt 16 Seiten, die letzten sind möglicherweise leer. Lösen Sie nicht die Heftklammern.

- Legen Sie Ihren Studentenausweis auf den Tisch.
 - Es sind **keine** weiteren Unterlagen zugelassen.
 - Die Nutzung eines **Taschenrechners** oder jedes anderen elektronischen Hilfsmittels ist während der Prüfung nicht gestattet.
 - Für die **Multiple Choice** Fragen erhält man:
 - +3 Punkte, wenn die Antwort richtig ist,
 - 0 Punkte, wenn die Frage nicht beantwortet ist oder mehrere Möglichkeiten markiert sind,
 - 1 Punkt, wenn die Antwort falsch ist.
 - Für die **Wahr/Falsch** Fragen erhält man:
 - +1 Punkt, wenn die Antwort richtig ist,
 - 0 Punkte, wenn die Frage nicht beantwortet ist oder mehrere Möglichkeiten markiert sind,
 - 1 Punkt, wenn die Antwort falsch ist.
 - Benutzen Sie einen **Kugelschreiber mit schwarzer oder blauer Tinte** und verwenden Sie Korrekturflüssigkeit (z.B. Tipp-Ex) um bei Bedarf Ihre Antwort zu ändern.
 - Falls eine Fragestellung einen Fehler enthält, darf der/die Unterrichtende die entsprechende Frage annullieren.

Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		



Erster Teil, Multiple-Choice-Fragen

Markieren Sie bitte für jede Frage die Box, die zu der richtigen Lösung gehört. Es gibt **genau eine** richtige Antwort pro Frage.

Frage 1 : Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ die Folge definiert durch

$$a_n = (-1)^{n+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{n}.$$

Dann gilt :

$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{1}{4}$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}$

$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{4}$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{7}{2}$

$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}$

Frage 2 : Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ die Folge definiert durch $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ und $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Dann gilt :

$\text{Inf } A = 0$ und $\text{Sup } A = \frac{3}{2}$

$\text{Inf } A = -1$ und $\text{Sup } A = \frac{3}{2}$

$\text{Inf } A = -1$ und $\text{Sup } A = 1$

$\text{Inf } A = 0$ und $\text{Sup } A = 1$

Frage 3 : Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{falls } x \neq 0, \\ 1 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Dann gilt :

$f'(0) = 1$

f ist nicht differenzierbar in $x = 0$

$f'(0) = \frac{1}{2}$

$f'(0) = e$

Frage 4 : Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch $f(x) = 2^x + x^2$. Dann gilt :

Es existiert $c \in]2, 3[$ so dass $f'(c) = 9$

Es existiert $c \in]3, 4[$ so dass $f'(c) = 9$

Es existiert $c \in]0, 1[$ so dass $f'(c) = 9$

Es existiert $c \in]1, 2[$ so dass $f'(c) = 9$

Frage 5 : Der Wert des Integrals $\int_0^\pi e^x \cos(2x) dx$ ist

$\frac{1}{5}(e^\pi - 1)$

$\frac{2}{5}(e^\pi - 1)$

$e^\pi - 1$

0

Frage 6 : Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nicht-leeres Intervall in \mathbb{R} , $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $\text{Im}(f)$ die Bildmenge von f . Welche der folgenden Aussagen ist wahr für jede mögliche Wahl von I und f ?

Wenn I abgeschlossen und beschränkt ist, sowie $\text{Im}(f)$ offen ist, dann ist f nicht stetig auf I .

Wenn I beschränkt ist, $\text{Im}(f)$ abgeschlossen und f stetig auf I ist, dann ist I abgeschlossen.

Wenn I abgeschlossen und beschränkt ist, sowie $\text{Im}(f)$ abgeschlossen ist, dann ist f stetig auf I .

Wenn sowohl I als auch $\text{Im}(f)$ beschränkt sind, dann ist f stetig auf I .



Frage 7 : Für $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$ sei im Folgenden die vom Parameter x abhängige Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log(x))^n}$$

definiert. Diese Reihe konvergiert genau dann, wenn

$x \in]0, \frac{1}{e}[$
 $x \in]e, +\infty[$

$x \in]0, \frac{1}{e}[\cup]e, +\infty[$
 $x \in]\frac{1}{e}, 1[\cup]1, e[$

Frage 8 : Der Wert des Integrals $\int_0^2 \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx$ ist

$\log(6)$

$\log\left(\frac{3}{8}\right)$

$\log\left(\frac{4}{3}\right)$

$\log\left(\frac{3}{2}\right)$

Frage 9 : Eine Lösung der Gleichung $z^5 = (1 + \sqrt{3}i)^2$ ist gegeben durch

$z = \sqrt[5]{4} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{15}\right)\right)$
 $z = \sqrt[5]{2} \left(\cos\left(\frac{16\pi}{15}\right) + i \sin\left(\frac{16\pi}{15}\right)\right)$

$z = \sqrt[5]{4} \left(\cos\left(\frac{16\pi}{15}\right) + i \sin\left(\frac{16\pi}{15}\right)\right)$
 $z = \sqrt[5]{2} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{15}\right)\right)$

Frage 10 : Sei $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch

$$f(x) = (x+1) \sin(x) + \cos(x) + e^{\sin(x)}.$$

Dann ist die Bildmenge von f gegeben durch

$[0, 2 + \pi + e]$

$[0, 1 + \frac{\pi}{2} + e]$

$[0, 2]$

$[\pi - 2, 2]$

Frage 11 : Das Konvergenzintervall der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n+1} (x-1)^n$$

ist gegeben durch

$[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$

$[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

$[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$

$[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

Frage 12 : Sei $(x_n)_{n \geq 1}$ die Folge definiert durch

$$x_n = \left(\cos\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)\right)^n.$$

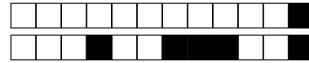
Dann ergibt der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ den Wert

1

$\frac{1}{e}$

e

0



Frage 13 : Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{|x|} & \text{falls } x \neq 0, \\ 1 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Dann gilt :

- f ist stetig auf \mathbb{R} , aber nicht differenzierbar in $x = 0$
- f ist differenzierbar in $x = 0$
- f ist rechtsseitig differenzierbar in $x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existiert aber f ist nicht stetig in $x = 0$

Frage 14 : Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch $f(x) = e^{1+x-\cos(x)}$. Die Entwicklung von f vom Grad 3 im Punkt $x_0 = 0$ ist gegeben durch

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> $f(x) = 1 - x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$ | <input type="checkbox"/> $f(x) = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$ |
| <input type="checkbox"/> $f(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ | <input type="checkbox"/> $f(x) = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ |

Frage 15 : Sei $(u_n)_{n \geq 0}$ die Folge definiert durch $u_0 = 1$ und $u_n = -\frac{2}{3}u_{n-1} + 2$ für $n \geq 1$. Dann gilt :

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ | <input type="checkbox"/> $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{6}{5}$ |
| <input type="checkbox"/> $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$ | <input type="checkbox"/> $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2$ |

Frage 16 : Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} |4 - x^2| & \text{falls } x \leq 0, \\ 4|x^2 - 1| & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Dann gilt :

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> f ist nicht stetig in $x = 1$ | <input type="checkbox"/> f ist nicht stetig in $x = 0$ |
| <input type="checkbox"/> f ist nicht stetig in $x = -2$ | <input type="checkbox"/> f ist stetig auf \mathbb{R} |

Frage 17 : Sei $a_k = (-1)^k \frac{k+2}{k^3}$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 0$ und $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Dann gilt :

- Die Reihe $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ konvergiert absolut
- $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$
- Die Reihe $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ konvergiert, aber konvergiert nicht absolut

Frage 18 : Der Wert des uneigentlichen Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$ ist

- | | | | |
|--|--|----------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> $\frac{\pi}{2}$ | <input type="checkbox"/> $2 \operatorname{actan}(e)$ | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ |
|--|--|----------------------------|--|



Zweiter Teil, Wahr/Falsch-Fragen

Markieren Sie bitte für jede der folgenden Fragen die Box WAHR, wenn die Aussage **immer korrekt** ist, oder die Box FALSCH, wenn sie **nicht immer korrekt** ist, d.h. wenn die Aussage manchmal falsch ist.

Frage 19 : Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ und sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge mit $a_0 = 1$ und $a_n = f(a_{n-1})$ für $n \geq 1$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

WAHR FALSCH

Frage 20 : Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine streng monotone Funktion. Dann ist f surjektiv.

WAHR FALSCH

Frage 21 : Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(t) = \int_0^t |x| dx$ ist differenzierbar in $t = 0$.

WAHR FALSCH

Frage 22 : Wenn die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-5)^k$ in $x = 2$ konvergiert, dann konvergiert sie auch in $x = 6$.

WAHR FALSCH

Frage 23 : Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit Entwicklung vom Grad 2 im Punkt $x_0 = 0$ gegeben durch $f(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2)$. Wenn f im Punkt $x_0 = 0$ differenzierbar ist, dann gilt $f'(0) = b$.

WAHR FALSCH

Frage 24 : Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2) = 0$. Dann gilt $\operatorname{Re}(z_1) \cdot \operatorname{Re}(z_2) = 0$.

WAHR FALSCH

Frage 25 : Sei $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wenn $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$, dann ist f beschränkt.

WAHR FALSCH

Frage 26 : Seien A und B zwei beschränkte, nicht-leere Teilmengen von \mathbb{R} . Wenn $\inf A > \sup B$, dann ist $A \cap B$ die leere Menge.

WAHR FALSCH



Frage 27 : Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass die Folge $(f(\frac{1}{n}))_{n \geq 1}$ den Grenzwert $f(0)$ hat. Dann ist f in $x_0 = 0$ stetig.

WAHR FALSCH

Frage 28 : Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge strikt negativer Zahlen. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn sie absolut konvergiert.

WAHR FALSCH



Dritter Teil, offene Fragen

Beantworten Sie die Fragen im eingerahmten Bereich. In diesem Teil der Prüfung müssen die Lösungen begründet werden: Der Rechenweg muss erkennbar und jeder Schritt begründet sein. Die grau markierten Kästchen bitte frei lassen, sie werden für die Korrektur benötigt.

Frage 29: Für diese Frage gibt es 8 Punkte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8

Hier nicht schreiben.

- (a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in C([a, b])$ eine Funktion die für alle $x \in]a, b[$ differenzierbar ist. Formulieren Sie den Mittelwertsatz aus der Vorlesung für die Funktion f .
- (b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 1$ gilt:

$$\frac{1}{x+1} \leq \log\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}.$$

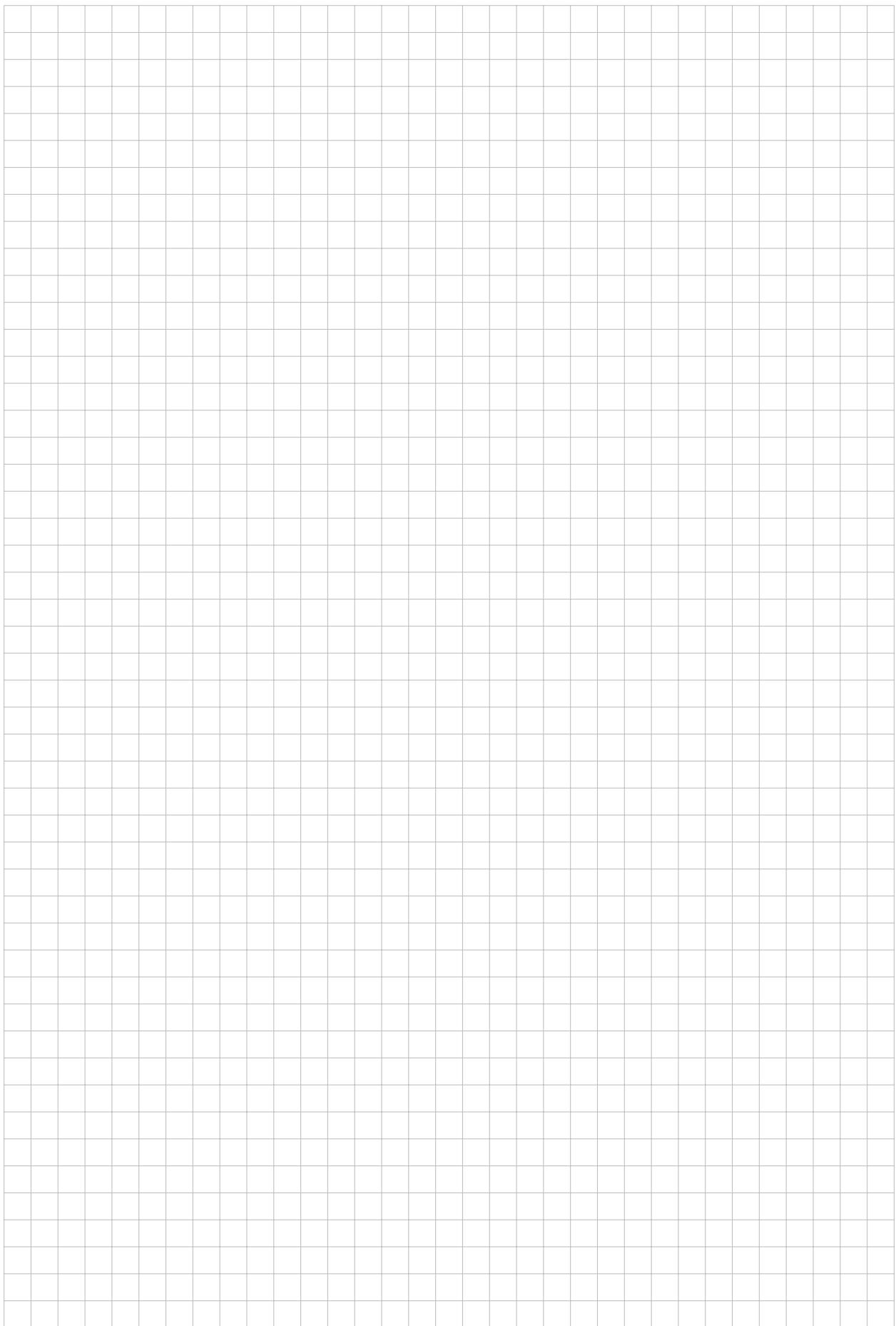
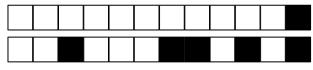
Hinweis: $\log\left(\frac{x+1}{x}\right) = \log(x+1) - \log(x)$.

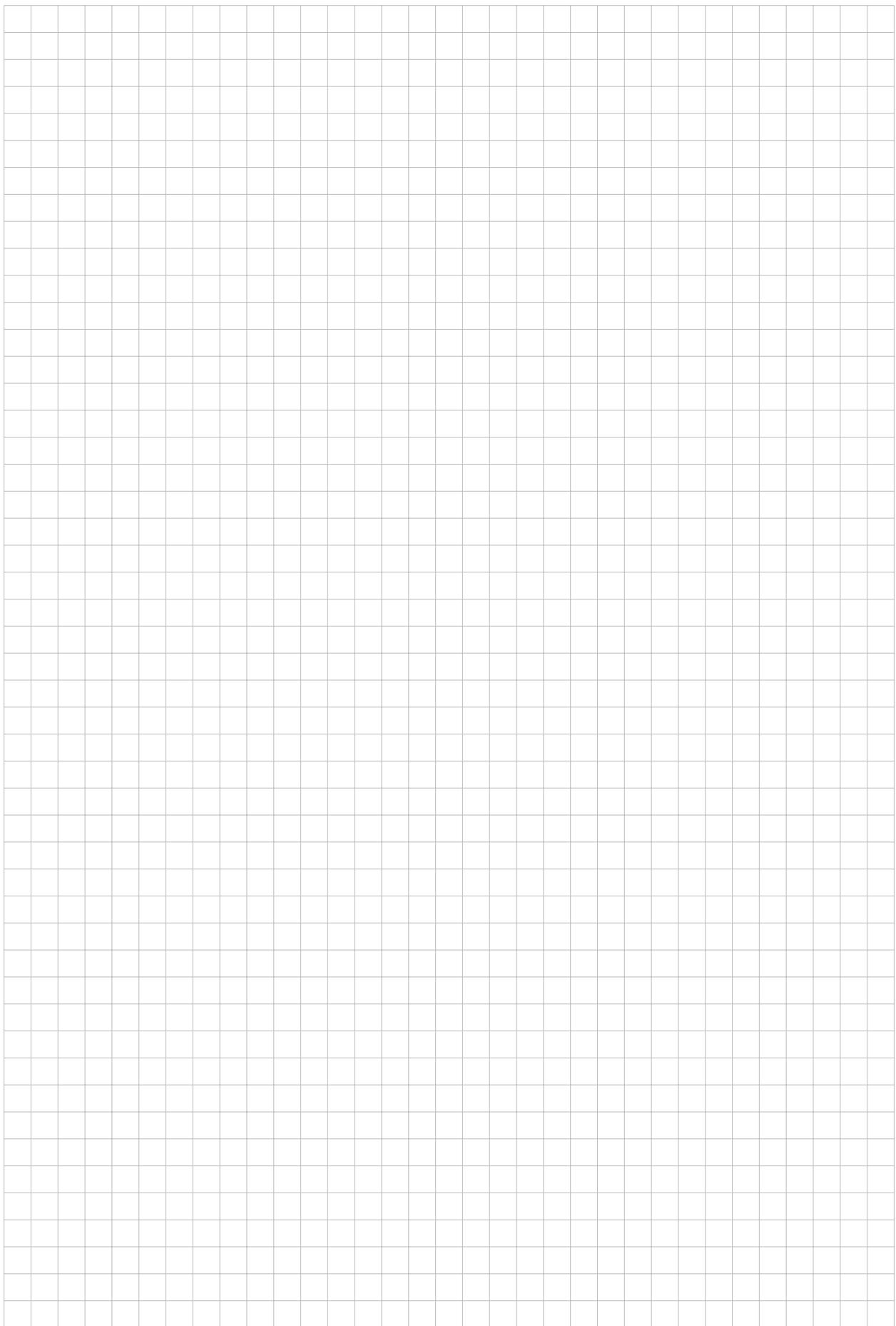
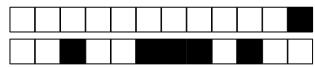
- (c) Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ die Folge gegeben durch

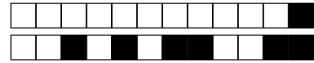
$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n+1).$$

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n \geq 1}$ monoton wachsend ist. Begründen Sie weiter, dass die Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ mit $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n)$ nach oben beschränkt ist. *Hinweis:* Zeigen Sie, dass $(b_n)_{n \geq 1}$ monoton fallend ist.

- (d) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n \geq 1}$ nach oben beschränkt ist und begründen Sie, warum der Grenzwert $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existiert. *Hinweis:* Schreiben Sie $a_n = a_n - b_n + b_n$ und überprüfen Sie, ob die Folge $(c_n)_{n \geq 1}$ mit $c_n := a_n - b_n$ beschränkt ist.







Frage 30: Für diese Frage gibt es 8 Punkte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8

Hier nicht schreiben.

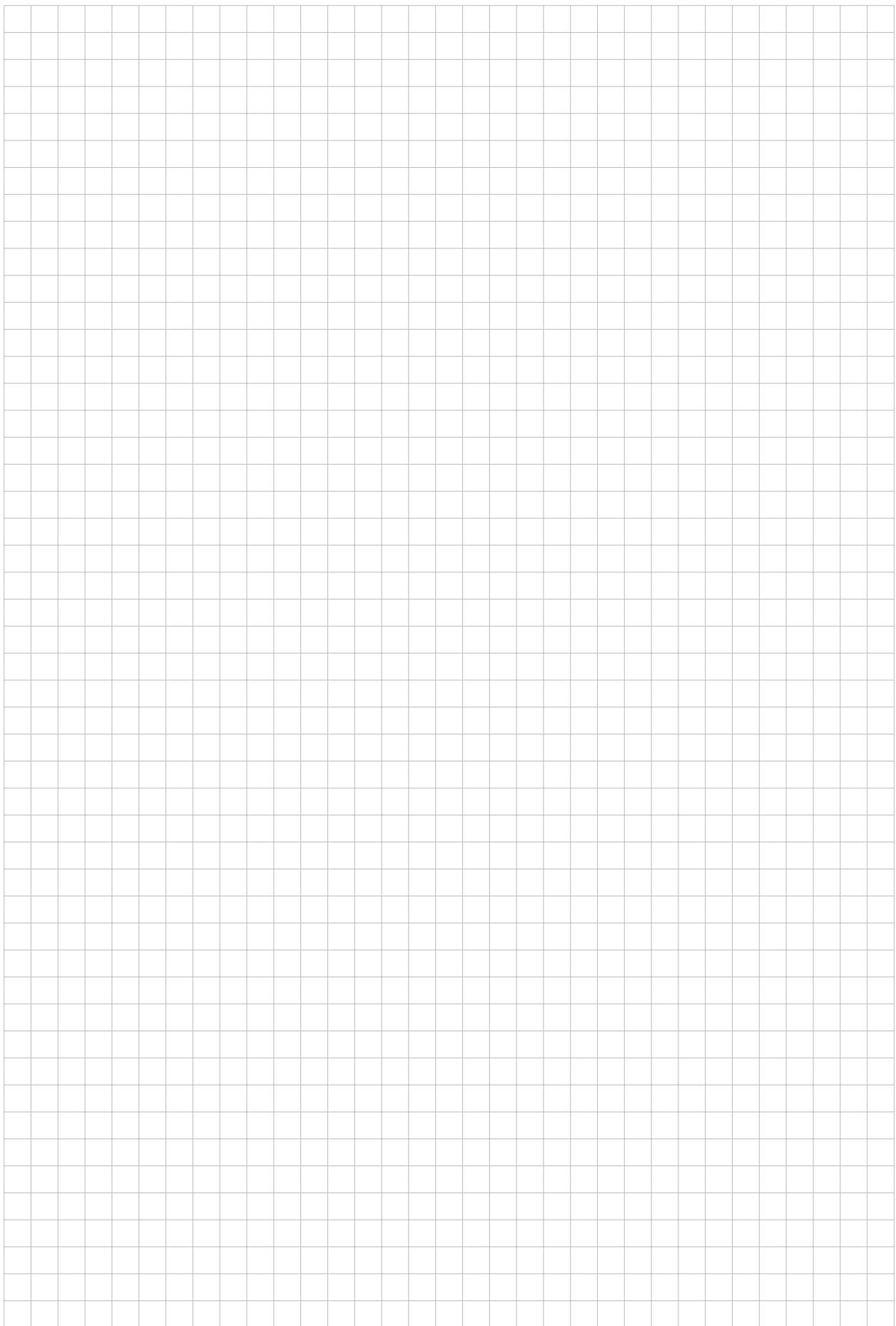
Sei die Funktion $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \log(\frac{1}{2} + x)$.

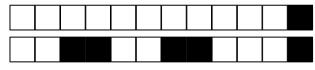
(a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ gilt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{(n+1)} 2^n \frac{(n-1)!}{(1+2x)^n}.$$

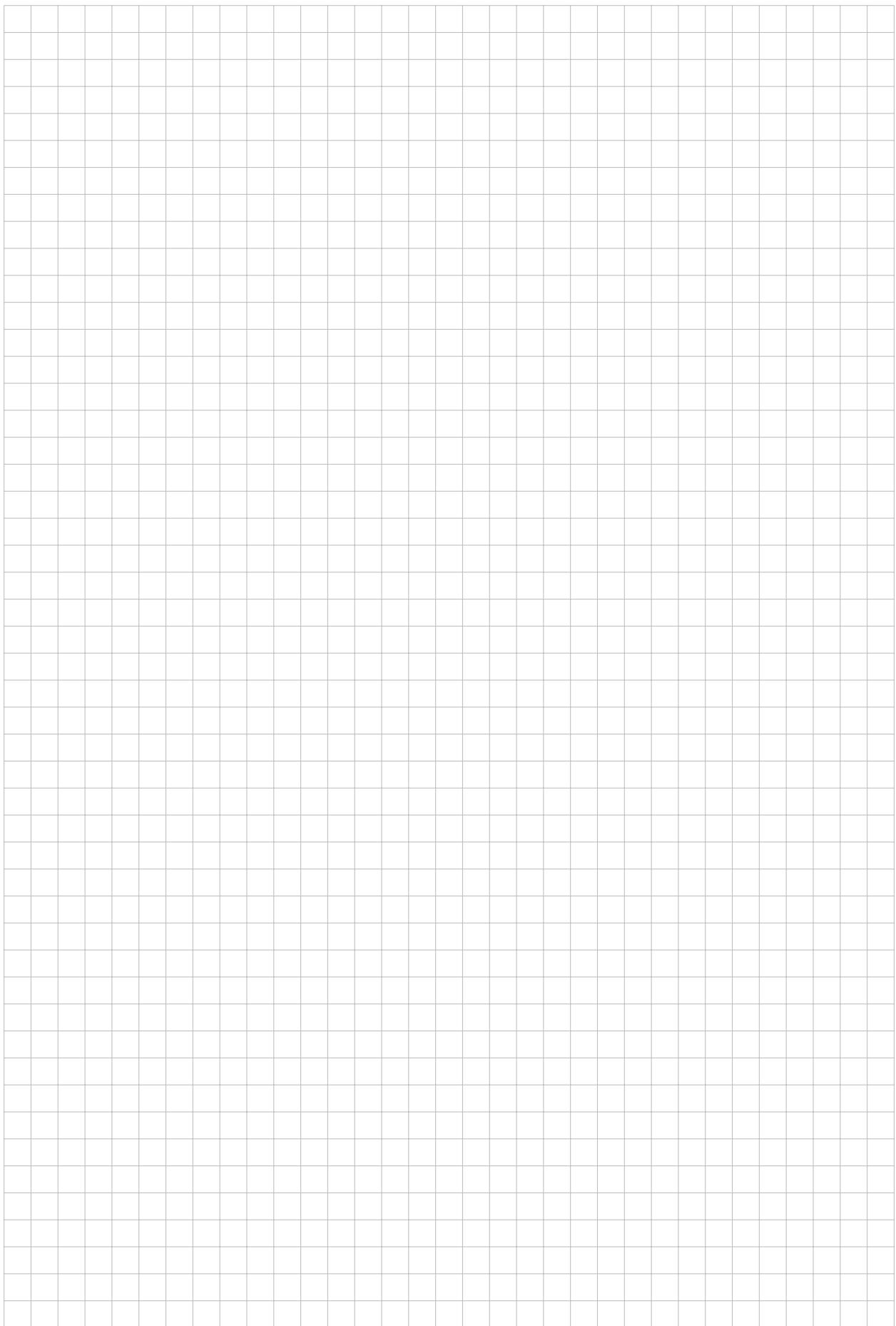
(b) Geben Sie die Taylorreihe von f im Punkt $x_0 = 1$ an.

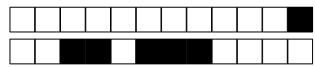
(c) Bestimmen Sie das Konvergenzintervall der Taylorreihe und begründen Sie Ihr Vorgehen.

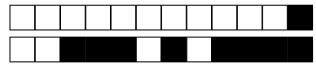




+1/12/49+







+1/14/47+



