EPFL

T. Schmid
Analysis I - (n/a)
15 Januar 2024
3 Stunden 30 Minuten

n/a

SCIPER: **999999**

Drehen Sie diese Seite nicht um, bevor Sie dazu aufgefordert werden. Jedes Blatt hat eine Vorder- und eine Rückseite. Es gibt 16 Seiten, die letzten sind möglicherweise leer. Lösen Sie nicht die Heftklammern.

- Legen Sie Ihren Studentenausweis auf den Tisch.
- Es sind **keine** weiteren Unterlagen zugelassen.
- Die Nutzung eines **Taschenrechners** oder jedes anderen elektronischen Hilfsmittels ist während der Prüfung nicht gestattet.
- Für die **Multiple Choice** Fragen erhält man:
  $+3$ Punkte, wenn die Antwort richtig ist,
  0 Punkte, wenn die Frage nicht beantwortet ist oder mehrere Möglichkeiten markiert sind,
  -1 Punkt, wenn die Antwort falsch ist.
- Für die **Wahr/Falsch** Fragen erhält man:
  $+1$ Punkt, wenn die Antwort richtig ist,
  0 Punkte, wenn die Frage nicht beantwortet ist oder mehrere Möglichkeiten markiert sind,
  -1 Punkt, wenn die Antwort falsch ist.
- Benutzen Sie einen **Kugelschreiber mit schwarzer oder blauer Tinte** und verwenden Sie Korrekturflüssigkeit (z.B. Tipp-Ex) um bei Bedarf Ihre Antwort zu ändern.
- Falls eine Fragestellung einen Fehler enthält, darf der/die Unterrichtende die entsprechende Frage annulieren.

Erster Teil, Multiple-Choice-Fragen

Markieren Sie bitte für jede Frage die Box, die zu der richtigen Lösung gehört. Es gibt **genau eine** richtige Antwort pro Frage.

Frage 1 : Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ die Folge definiert durch

$$a_n = (-1)^{n+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{n}\,.$$

Dann gilt :

- ☐ $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$
- ☐ $\liminf_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{4}$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n = \frac{7}{2}$
- ☐ $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{4}$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$
- ☐ $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$

Frage 2 : Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ die Folge definiert durch $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ und $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Dann gilt :

- ☐ $\operatorname{Inf} A = 0$ und $\operatorname{Sup} A = \frac{3}{2}$
- ☐ $\operatorname{Inf} A = -1$ und $\operatorname{Sup} A = 1$
- ☐ $\operatorname{Inf} A = -1$ und $\operatorname{Sup} A = \frac{3}{2}$
- ☐ $\operatorname{Inf} A = 0$ und $\operatorname{Sup} A = 1$

Frage 3 : Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{falls } x \neq 0\,, \\ 1 & \text{falls } x = 0\,. \end{cases}$$

Dann gilt :

- ☐ $f'(0) = 1$
- ☐ $f'(0) = \frac{1}{2}$
- ☐ f ist nicht differenzierbar in $x = 0$
- ☐ $f'(0) = e$

Frage 4 : Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch $f(x) = 2^x + x^2$. Dann gilt :

- ☐ Es existiert $c \in \,]2,3[$ so dass $f'(c) = 9$
- ☐ Es existiert $c \in \,]0,1[$ so dass $f'(c) = 9$
- ☐ Es existiert $c \in \,]3,4[$ so dass $f'(c) = 9$
- ☐ Es existiert $c \in \,]1,2[$ so dass $f'(c) = 9$

Frage 5 : Der Wert des Integrals $\displaystyle\int_0^\pi e^x \cos(2x)\,\mathrm{d}x$ ist

- ☐ $\frac{1}{5}(e^\pi - 1)$
- ☐ $\frac{2}{5}(e^\pi - 1)$
- ☐ $e^\pi - 1$
- ☐ 0

Frage 6 : Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nicht-leeres Intervall in $\mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\operatorname{Im}(f)$ die Bildmenge von f. Welche der folgenden Aussagen ist wahr für jede mögliche Wahl von I und f ?

- ☐ Wenn I abgeschlossen und beschränkt ist, sowie $\operatorname{Im}(f)$ offen ist, dann ist f nicht stetig auf I.
- ☐ Wenn I beschränkt ist, $\operatorname{Im}(f)$ abgeschlossen und f stetig auf I ist, dann ist I abgeschlossen.
- ☐ Wenn I abgeschlossen und beschränkt ist, sowie $\operatorname{Im}(f)$ abgeschlossen ist, dann ist f stetig auf I.
- ☐ Wenn sowohl I als auch $\operatorname{Im}(f)$ beschränkt sind, dann ist f stetig auf I.

Frage 7 : Für $x \in \,]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$ sei im Folgenden die vom Parameter x abhängige Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log(x))^n}$$

definiert. Diese Reihe konvergiert genau dann, wenn

- ☐ $x \in \,]0, \frac{1}{e}[$
- ☐ $x \in \,]0, \frac{1}{e}[\,\cup\,]e,+\infty[$
- ☐ $x \in \,]e,+\infty[$
- ☐ $x \in \,]\frac{1}{e}, 1[\,\cup\,]1, e[$

Frage 8 : Der Wert des Integrals $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$ ist

- ☐ $\log(6)$
- ☐ $\log\left(\frac{3}{8}\right)$
- ☐ $\log\left(\frac{4}{3}\right)$
- ☐ $\log\left(\frac{3}{2}\right)$

Frage 9 : Eine Lösung der Gleichung $z^5 = \left(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)^2$ ist gegeben durch

- ☐ $z = \sqrt[5]{4}\,\left(\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{15}\right)\right)$
- ☐ $z = \sqrt[5]{4}\,\left(\cos\left(\frac{16\pi}{15}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{16\pi}{15}\right)\right)$
- ☐ $z = \sqrt[5]{2}\,\left(\cos\left(\frac{16\pi}{15}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{16\pi}{15}\right)\right)$
- ☐ $z = \sqrt[5]{2}\,\left(\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{15}\right)\right)$

Frage 10 : Sei $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch

$$f(x) = (x+1)\sin(x) + \cos(x) + e^{\sin(x)}.$$

Dann ist die Bildmenge von f gegeben durch

- ☐ $[0, 2+\pi+e]$
- ☐ $\left[0, 1+\frac{\pi}{2}+e\right]$
- ☐ $[0,2]$
- ☐ $[\pi-2, 2]$

Frage 11 : Das Konvergenzintervall der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n+1}(x-1)^n$$

ist gegeben durch

- ☐ $]\frac{3}{4}, \frac{5}{4}[$
- ☐ $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$
- ☐ $[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}[$
- ☐ $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$

Frage 12 : Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ die Folge definiert durch

$$x_n = \left(\cos\left(\sqrt{\tfrac{2}{n}}\,\right)\right)^n.$$

Dann ergibt der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ den Wert

- ☐ 1
- ☐ $\frac{1}{e}$
- ☐ e
- ☐ 0

Frage 13 : Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{|x|} & \text{falls } x \neq 0\,, \\ 1 & \text{falls } x = 0\,. \end{cases}$$

Dann gilt :

- ☐ f ist stetig auf $\mathbb{R}$, aber nicht differenzierbar in $x = 0$
- ☐ f ist differenzierbar in $x = 0$
- ☐ f ist rechtsseitig differenzierbar in $x = 0$
- ☐ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert aber f ist nicht stetig in $x = 0$

Frage 14 : Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch $f(x) = e^{1+x-\cos(x)}$. Die Entwicklung von f vom Grad 3 im Punkt $x_0 = 0$ ist gegeben durch

- ☐ $f(x) = 1 - x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$
- ☐ $f(x) = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$
- ☐ $f(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$
- ☐ $f(x) = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

Frage 15 : Sei $(u_n)_{n\geq 0}$ die Folge definiert durch $u_0 = 1$ und $u_n = -\frac{2}{3}u_{n-1} + 2$ für $n \geq 1$. Dann gilt :

- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{6}{5}$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$

Frage 16 : Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \left|4 - x^2\right| & \text{falls } x \leq 0\,, \\ 4\left|x^2 - 1\right| & \text{falls } x > 0\,. \end{cases}$$

Dann gilt :

- ☐ f ist nicht stetig in $x = 1$
- ☐ f ist nicht stetig in $x = 0$
- ☐ f ist nicht stetig in $x = -2$
- ☐ f ist stetig auf $\mathbb{R}$

Frage 17 : Sei $a_k = (-1)^k \dfrac{k+2}{k^3}$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 0$ und $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Dann gilt :

- ☐ Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ konvergiert absolut
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$
- ☐ Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ konvergiert, aber konvergiert nicht absolut

Frage 18 : Der Wert des uneigentlichen Integrals $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ ist

- ☐ $\dfrac{\pi}{2}$
- ☐ $2\,\operatorname{actan}(e)$
- ☐ 1
- ☐ $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)$

Zweiter Teil, Wahr/Falsch-Fragen

Markieren Sie bitte für jede der folgenden Fragen die Box WAHR, wenn die Aussage **immer korrekt** ist, oder die Box FALSCH, wenn sie **nicht immer korrekt** ist, d.h. wenn die Aussage manchmal falsch ist.

Frage 19 : Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ und sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge mit $a_0 = 1$ und $a_n = f(a_{n-1})$ für $n \geq 1$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 20 : Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng monotone Funktion. Dann ist f surjektiv.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 21 : Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(t) = \int_0^t |x| \, \mathrm{d}x$ ist differenzierbar in $t = 0$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 22 : Wenn die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, (x-5)^k$ in $x = 2$ konvergiert, dann konvergiert sie auch in $x = 6$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 23 : Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Entwicklung vom Grad 2 im Punkt $x_0 = 0$ gegeben durch $f(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2)$. Wenn f im Punkt $x_0 = 0$ differenzierbar ist, dann gilt $f'(0) = b$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 24 : Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,(z_1 \cdot z_2) = 0$. Dann gilt $\mathrm{Re}\,(z_1) \cdot \mathrm{Re}\,(z_2) = 0$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 25 : Sei $f\colon \,]0,1[\, \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wenn $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$, dann ist f beschränkt.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 26 : Seien A und B zwei beschränkte, nicht-leere Teilmengen von $\mathbb{R}$. Wenn $\mathrm{Inf}\, A > \mathrm{Sup}\, B$, dann ist $A \cap B$ die leere Menge.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 27 : Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass die Folge $\big(f(\frac{1}{n})\big)_{n\geq 1}$ den Grenzwert $f(0)$ hat. Dann ist f in $x_0 = 0$ stetig.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 28 : Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge strikt negativer Zahlen. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn sie absolut konvergiert.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Dritter Teil, offene Fragen

Beantworten Sie die Fragen im eingerahmten Bereich. In diesem Teil der Prüfung müssen die Lösungen begründet werden: Der Rechenweg muss erkennbar und jeder Schritt begründet sein. Die grau markierten Kästchen bitte frei lassen, sie werden für die Korrektur benötigt.

Frage 29: *Für diese Frage gibt es 8 Punkte.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 *Hier nicht schreiben.*

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in C([a,b])$ eine Funktion die für alle $x \in]a,b[$ differenzierbar ist. Formulieren Sie den Mittelwertsatz aus der Vorlesung für die Funktion f.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 1$ gilt:

$$\frac{1}{x+1} \leq \log\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}.$$

Hinweis: $\log(\frac{x+1}{x}) = \log(x+1) - \log(x)$.

(c) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ die Folge gegeben durch

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1).$$

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton wachsend ist. Begründen Sie weiter, dass die Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ mit $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n)$ nach oben beschränkt ist. *Hinweis: Zeigen Sie, dass $(b_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend ist.*

(d) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ nach oben beschränkt ist und begründen Sie, warum der Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ existiert. *Hinweis: Schreiben Sie $a_n = a_n - b_n + b_n$ und überprüfen Sie, ob die Folge $(c_n)_{n\geq 1}$ mit $c_n := a_n - b_n$ beschränkt ist.*

Frage 30: *Für diese Frage gibt es 8 Punkte.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 *Hier nicht schreiben.*

Sei die Funktion $f: \ ]0,\infty[\to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \log(\frac{1}{2} + x)$.

(a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ gilt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{(n+1)} 2^n \frac{(n-1)!}{(1+2x)^n}.$$

(b) Geben Sie die Taylorreihe von f im Punkt $x_0 = 1$ an.

(c) Bestimmen Sie das Konvergenzintervall der Taylorreihe und begründen Sie Ihr Vorgehen.