n/a

Prof. D. Kressner
Analyse I - (n/a)
16 Januar 2023
3 Stunden 30 Minuten

n/a

SCIPER : **999999**

Unterschrift :

Drehen Sie diese Seite nicht um, bevor Sie dazu aufgefordert werden. Jedes Blatt hat eine Vorder- und eine Rückseite. Es gibt 16 Seiten (die letzten sind möglicherweise leer), mit 31 Fragen. Lösen Sie nicht die Heftklammern.

- Legen Sie Ihren Studentenausweis auf den Tisch.
- Es sind **keine** weiteren Unterlagen zugelassen.
- Die Nutzung eines **Taschenrechners** oder jedes anderen elektronischen Hilfsmittels ist während der Prüfung nicht gestattet.
- Für die **Multiple Choice** Fragen erhält man:
  $+3$ Punkte, wenn die Antwort richtig ist,
  0 Punkte, wenn die Frage nicht beantwortet ist oder mehrere Möglichkeiten markiert sind,
  -1 Punkt, wenn die Antwort falsch ist.
- Für die **Wahr/Falsch** Fragen erhält man:
  $+1$ Punkt, wenn die Antwort richtig ist,
  0 Punkte, wenn die Frage nicht beantwortet ist oder mehrere Möglichkeiten markiert sind,
  -1 Punkt, wenn die Antwort falsch ist.
- Benutzen Sie einen **Kugelschreiber mit schwarzer oder blauer Tinte** und verwenden Sie Korrekturflüssigkeit (z.B. Tipp-Ex) um bei Bedarf Ihre Antwort zu ändern.
- Falls eine Fragestellung einen Fehler enthält, darf der/die Unterrichtende die entsprechende Frage annulieren.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren
☒ ☑ ■	☐	☐

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Erster Teil, Multiple-Choice-Fragen

Markieren Sie bitte für jede Frage die Box, die zu der richtigen Lösung gehört. Es gibt **genau eine** richtige Antwort pro Frage.

Frage 1 : Gegeben sei die Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\geq 1}$ mit

$$a_n = (-1)^n \left(\frac{6n+8}{2n}\right) - 3 - \frac{4}{n}.$$

Dann gilt:

☐ $\liminf_{n\to+\infty} a_n = -6$ und $\limsup_{n\to+\infty} a_n = 0$

☐ $\liminf_{n\to+\infty} a_n = -3$ und $\limsup_{n\to+\infty} a_n = 0$

☐ $\liminf_{n\to+\infty} a_n = -6$ und $\limsup_{n\to+\infty} a_n = 6$

☐ $\liminf_{n\to+\infty} a_n = -14$ und $\limsup_{n\to+\infty} a_n = 0$

Frage 2 : Seien $A \subset \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkte Mengen. Dann gilt:

☐ $\mathrm{Sup}(A \cup B) = (\mathrm{Sup}\,A) \cdot (\mathrm{Sup}\,B)$

☐ $\mathrm{Sup}(A \cup B) = \max\{\mathrm{Sup}\,A, \mathrm{Sup}\,B\}$

☐ $\mathrm{Sup}(A \cup B) = \min\{\mathrm{Sup}\,A, \mathrm{Sup}\,B\}$

☐ $\mathrm{Sup}(A \cup B) = (\mathrm{Sup}\,A) + (\mathrm{Sup}\,B)$

Frage 3 : Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{für } x \geq -1\,, \\ \frac{1}{2}(x^2+1) & \text{für } x < -1\,. \end{cases}$$

Dann gilt:

☐ f ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$

☐ f ist differenzierbar in $x = 0$ und stetig in $x = -1$

☐ f ist differenzierbar in $x = -1$ und stetig in $x = 0$

☐ f ist nicht stetig in $x = -1$

Frage 4 : Gegeben seien $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ und die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cos(2x)$. Dann gilt für alle $x, y \in I$ mit $x < y$ die folgende Beziehung:

☐ $-2 \leq \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq 0$

☐ $-1 \leq \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq 1$

☐ $-\pi \leq \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq -1$

☐ $0 \leq \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq 2$

Frage 5 :

Das bestimmte Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x-1}{(x-3)\,(x+2)}\,\mathrm{d}x$ ist

☐ 0

☐ $\sqrt{6}\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{6}\right)$

☐ $\log(3) - \log(2)$

☐ -1

Frage 6 : Gegeben sei die Funktion $f\colon \left[\frac{1}{2},1\right] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$. Sei I das Bild von f. Dann gilt:

- ☐ $I = \left[1, 1+\frac{1}{\pi}\right]$
- ☐ $I = [2,3]$
- ☐ $I = \left[1-\frac{1}{\pi}, 1\right]$
- ☐ $I = [1,2]$

Frage 7 : Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n^2}$ konvergiert genau dann, wenn

- ☐ $-1 < \alpha < 0$
- ☐ $\alpha < -1$
- ☐ $\alpha \geq 0$
- ☐ $\alpha < 0$

Frage 8 : Das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_{0^+}^{1} \frac{\log(x)}{x^2}\mathrm{d}x$

- ☐ konvergiert und ist -1
- ☐ konvergiert und ist $+1$
- ☐ konvergiert und ist -4
- ☐ divergiert

Frage 9 :
Die komplexen Zahlen $3, 1-2\mathrm{i}$ und $1+2\mathrm{i}$ sind die Nullstellen des Polynoms

- ☐ $z^3 - 5z^2 + 11z - 15$
- ☐ $z^3 - 2iz^2 + 45$
- ☐ $z^3 + 14z^2 + 15$
- ☐ $z^3 - 5z^2 + 5z + 45$

Frage 10 : Für $a_0 \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ mit $a_n = \dfrac{1}{2}a_{n-1} + \dfrac{1}{2}$ für $n \geq 1$. Dann gilt:

- ☐ Wenn $a_0 = 0$ dann ist die Folge konvergent.
- ☐ Wenn $a_0 > 1$ dann ist die Folge monoton steigend.
- ☐ Wenn $a_0 < 1$ dann ist die Folge monoton fallend.
- ☐ Wenn $a_0 < 0$ dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Frage 11 : Sei $a_n = 1$ für n gerade und $a_n = 0$ für n ungerade. Dann gilt für den Konvergenzradius R der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$:

- ☐ $R = \frac{1}{2}$
- ☐ $R = \infty$
- ☐ $R = 1$
- ☐ $R = 0$

Frage 12 : Gegeben sei die Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = (3n+1)^{\log\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$. Dann gilt:

- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$

Frage 13 :
Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2/|x|} & \text{für } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{für } x = 0\,. \end{cases}$$

Dann gilt:

- ☐ f ist stetig aber nicht differenzierbar in $x_0 = 0$.
- ☐ f ist differenzierbar in $x_0 = 0$.
- ☐ Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht.
- ☐ Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert, aber f ist nicht stetig in $x_0 = 0$.

Frage 14 :
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x \log(1+x)$. Die Taylor-Entwicklung dritten Grades von f um $x_0 = 0$ ist

- ☐ $f(x) = x + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{2} + o(x^3)$
- ☐ $f(x) = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$
- ☐ $f(x) = x - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^3}{2} + o(x^3)$
- ☐ $f(x) = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{2} + o(x^3)$

Frage 15 : Gegeben sei die Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\geq 0}$ mit $a_0 = \frac{3}{2}$ und $a_n = 3 - \dfrac{2}{a_{n-1}}$ für $n \geq 1$. Dann gilt:

- ☐ Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ konvergiert nicht.
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$

Frage 16 : Für $a,\ b \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \text{für } x \leq 0\,, \\ \sin(ax+b) & \text{für } x > 0\,. \end{cases}$$

Dann ist f stetig auf $\mathbb{R}$ wenn:

- ☐ $a = \dfrac{\pi}{2}$ und $b = \dfrac{\pi}{2}$
- ☐ $a = -\dfrac{\pi}{4}$ und $b = 0$
- ☐ $a = 0$ und $b = -\dfrac{\pi}{4}$
- ☐ $a = 0$ und $b = \dfrac{\pi}{4}$

Frage 17 : Gegeben sei $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ mit $a_k = (-1)^k \dfrac{k+1}{k^2}$ für $k \in \mathbb{N},\ k \geq 1$. Dann gilt:

- ☐ Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, aber sie konvergiert nicht absolut.
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$
- ☐ Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut.

Frage 18 : Das bestimmte Integral $\int_0^1 x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$ ist

- ☐ $2 - \frac{5}{e}$
- ☐ $2 - \frac{3}{e}$
- ☐ $2 - \frac{1}{e}$
- ☐ $2 - \frac{4}{e}$

Zweiter Teil, Wahr/Falsch-Fragen

Markieren Sie bitte für jede der folgenden Fragen die Box WAHR, wenn die Aussage **immer korrekt** ist, oder die Box FALSCH, wenn sie **nicht immer korrekt** ist, d.h. wenn die Aussage manchmal falsch ist.

Frage 19 : Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folger reeller, von Null verschiedener Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 20 : Gegeben sei eine bijektive und monoton steigende Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann ist $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch monoton steigend.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 21 : Das Integral $\int_{-1}^{1} e^{-\sin(x)}\,\mathrm{d}x$ ist Null.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 22 : Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Dann gilt: Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, hat f eine Taylor-Entwicklung vom Grad n um x_0.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 23 : Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$. Dann existieren Zahlen a, $b \in \mathbb{R}$, so dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - a - bx}{x} = 0.$$

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 24 : Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ ist $z^5 + \frac{1}{z^5}$ reell (das heisst, der Imaginärteil ist Null).

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 25 : Sei $f\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[0,1]$ und das Bild von f sei $[0,1]$. Dann gibt es mindestens ein $x \in [0,1]$ mit $f(x) - x = 0$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 26 : Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ zwei nichtleere und beschränkte Mengen. Wenn $\operatorname{Inf} A \leq \operatorname{Inf} B$ und $\operatorname{Sup} A \geq \operatorname{Sup} B$, dann gilt $B \subset A$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 27 : Gegeben sei eine in $x_0 = 0$ stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = xf(x)$ differenzierbar in $x_0 = 0$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 28 : Seien $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ zwei Folgen reeller Zahlen, so dass die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergieren. Dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Dritter Teil, Offene Fragen

Beantworten Sie die Fragen im eingerahmten Bereich. In diesem Teil der Prüfung müssen die Lösungen begründet werden: Der Rechenweg muss erkennbar und jeder Schritt begründet sein. Die grau markierten Kästchen bitte frei lassen, sie werden für die Korrektur benötigt.

Frage 29: *Diese Frage zählt 4 Punkte.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 *Hier nicht schreiben.*

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = e^{(x^2)}$ konvex auf $[-1, 1]$ ist.

Frage 30: *Diese Frage zählt 8 Punkte.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 *Hier nicht schreiben.*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = xe^x - e^x.$$

(a) Zeigen Sie per Induktion, dass für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f^{(k)}(x) = (k-1)e^x + xe^x.$$

(b) Geben Sie die Taylor-Reihe von f um $x_0 = 1$ an.

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylor-Reihe aus Teil (b). Begründen Sie Ihre Antwort.

Frage 31: *Diese Frage zählt 4 Punkte.*

$\square_0$ $\square_1$ $\square_2$ $\square_3$ $\square_4$ *Hier nicht schreiben.*

Sei $f \in C^2(]0,1[)$. Zeigen Sie, dass für jedes $x_0 \in]0,1[$ die folgende Gleichung gilt:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2}\Big(f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0)\Big) = f''(x_0).$$