

**EPFL**

Prof. D. Kressner  
Analyse I - (n/a)  
16 Januar 2023  
3 Stunden 30 Minuten

n/a

n/a

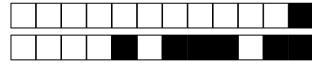
SCIPER: **999999**

Unterschrift :

Drehen Sie diese Seite nicht um, bevor Sie dazu aufgefordert werden. Jedes Blatt hat eine Vorder- und eine Rückseite. Es gibt 16 Seiten (die letzten sind möglicherweise leer), mit 31 Fragen. Lösen Sie nicht die Heftklammern.

- Legen Sie Ihren Studentenausweis auf den Tisch.
- Es sind **keine** weiteren Unterlagen zugelassen.
- Die Nutzung eines **Taschenrechners** oder jedes anderen elektronischen Hilfsmittels ist während der Prüfung nicht gestattet.
- Für die **Multiple Choice** Fragen erhält man:
  - +3 Punkte, wenn die Antwort richtig ist,
  - 0 Punkte, wenn die Frage nicht beantwortet ist oder mehrere Möglichkeiten markiert sind,
  - 1 Punkt, wenn die Antwort falsch ist.
- Für die **Wahr/Falsch** Fragen erhält man:
  - +1 Punkt, wenn die Antwort richtig ist,
  - 0 Punkte, wenn die Frage nicht beantwortet ist oder mehrere Möglichkeiten markiert sind,
  - 1 Punkt, wenn die Antwort falsch ist.
- Benutzen Sie einen **Kugelschreiber mit schwarzer oder blauer Tinte** und verwenden Sie Korrekturflüssigkeit (z.B. Tipp-Ex) um bei Bedarf Ihre Antwort zu ändern.
- Falls eine Fragestellung einen Fehler enthält, darf der/die Unterrichtende die entsprechende Frage annullieren.

Respectez les consignes suivantes   Read these guidelines   Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse   select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse   NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse   Correct an answer Antwort korrigieren
ce qu'il ne faut PAS faire   what should NOT be done   was man NICHT tun sollte		



## Erster Teil, Multiple-Choice-Fragen

Markieren Sie bitte für jede Frage die Box, die zu der richtigen Lösung gehört. Es gibt genau eine richtige Antwort pro Frage.

**Frage 1 :** Gegeben sei die Folge reeller Zahlen  $(a_n)_{n \geq 1}$  mit

$$a_n = (-1)^n \left( \frac{6n+8}{2n} \right) - 3 - \frac{4}{n}.$$

Dann gilt:

- $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -6$  und  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$
- $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -3$  und  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$
- $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -6$  und  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 6$
- $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -14$  und  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

**Frage 2 :** Seien  $A \subset \mathbb{R}$  und  $B \subset \mathbb{R}$  nach oben beschränkte Mengen. Dann gilt:

- $\text{Sup}(A \cup B) = (\text{Sup } A) \cdot (\text{Sup } B)$
- $\text{Sup}(A \cup B) = \max\{\text{Sup } A, \text{Sup } B\}$
- $\text{Sup}(A \cup B) = \min\{\text{Sup } A, \text{Sup } B\}$
- $\text{Sup}(A \cup B) = (\text{Sup } A) + (\text{Sup } B)$

**Frage 3 :** Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{für } x \geq -1, \\ \frac{1}{2}(x^2 + 1) & \text{für } x < -1. \end{cases}$$

Dann gilt:

- $f$  ist differenzierbar auf  $\mathbb{R}$
- $f$  ist differenzierbar in  $x = 0$  und stetig in  $x = -1$
- $f$  ist differenzierbar in  $x = -1$  und stetig in  $x = 0$
- $f$  ist nicht stetig in  $x = -1$

**Frage 4 :** Gegeben seien  $I = [0, \frac{\pi}{2}]$  und die Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \cos(2x)$ . Dann gilt für alle  $x, y \in I$  mit  $x < y$  die folgende Beziehung:

- $-2 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 0$
- $-1 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 1$
- $-\pi \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq -1$
- $0 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 2$

**Frage 5 :**

Das bestimmte Integral  $\int_0^1 \frac{2x-1}{(x-3)(x+2)} dx$  ist

- 0
- $\sqrt{6} \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{6}\right)$
- $\log(3) - \log(2)$
- 1



**Frage 6 :** Gegeben sei die Funktion  $f: [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi} \sin(\frac{\pi}{x})$ . Sei  $I$  das Bild von  $f$ . Dann gilt:

- $I = [1, 1 + \frac{1}{\pi}]$         $I = [2, 3]$         $I = [1 - \frac{1}{\pi}, 1]$         $I = [1, 2]$

**Frage 7 :** Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{n^2}$  konvergiert genau dann, wenn

- $-1 < \alpha < 0$         $\alpha < -1$         $\alpha \geq 0$         $\alpha < 0$

**Frage 8 :** Das uneigentliche Integral  $\int_{0^+}^1 \frac{\log(x)}{x^2} dx$

- konvergiert und ist  $-1$        konvergiert und ist  $+1$   
 konvergiert und ist  $-4$        divergiert

**Frage 9 :**

Die komplexen Zahlen  $3, 1 - 2i$  und  $1 + 2i$  sind die Nullstellen des Polynoms

- $z^3 - 5z^2 + 11z - 15$         $z^3 - 2iz^2 + 45$   
  $z^3 + 14z^2 + 15$         $z^3 - 5z^2 + 5z + 45$

**Frage 10 :** Für  $a_0 \in \mathbb{R}$  betrachten wir die Folge  $(a_n)_{n \geq 0}$  mit  $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}$  für  $n \geq 1$ . Dann gilt:

- Wenn  $a_0 = 0$  dann ist die Folge konvergent.  
 Wenn  $a_0 > 1$  dann ist die Folge monoton steigend.  
 Wenn  $a_0 < 1$  dann ist die Folge monoton fallend.  
 Wenn  $a_0 < 0$  dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .

**Frage 11 :** Sei  $a_n = 1$  für  $n$  gerade und  $a_n = 0$  für  $n$  ungerade. Dann gilt für den Konvergenzradius  $R$  der Potenzreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ :

- $R = \frac{1}{2}$         $R = \infty$         $R = 1$         $R = 0$

**Frage 12 :** Gegeben sei die Folge reeller Zahlen  $(a_n)_{n \geq 1}$  mit  $a_n = (3n+1)^{\log(\frac{1}{\sqrt{n}})}$ . Dann gilt:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$         $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$   
  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$         $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$

**Frage 13 :**

Gegeben sei die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2/|x|} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Dann gilt:

- $f$  ist stetig aber nicht differenzierbar in  $x_0 = 0$ .
- $f$  ist differenzierbar in  $x_0 = 0$ .
- Der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existiert nicht.
- Der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existiert, aber  $f$  ist nicht stetig in  $x_0 = 0$ .

**Frage 14 :**

Gegeben sei die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = e^x \log(1+x)$ . Die Taylor-Entwicklung dritten Grades von  $f$  um  $x_0 = 0$  ist

- |  |  |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> $f(x) = x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$ | <input type="checkbox"/> $f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ |
| <input type="checkbox"/> $f(x) = x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$ | <input type="checkbox"/> $f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$ |

**Frage 15 :** Gegeben sei die Folge reeller Zahlen  $(a_n)_{n \geq 0}$  mit  $a_0 = \frac{3}{2}$  und  $a_n = 3 - \frac{2}{a_{n-1}}$  für  $n \geq 1$ . Dann gilt:

- |  |  |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> Die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ konvergiert nicht. | <input type="checkbox"/> $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ |
| <input type="checkbox"/> $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$           | <input type="checkbox"/> $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$ |

**Frage 16 :** Für  $a, b \in \mathbb{R}$  betrachten wir die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{für } x \leq 0, \\ \sin(ax+b) & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Dann ist  $f$  stetig auf  $\mathbb{R}$  wenn:

- |  |   |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> $a = \frac{\pi}{2}$ und $b = \frac{\pi}{2}$ | <input type="checkbox"/> $a = -\frac{\pi}{4}$ und $b = 0$ |
| <input type="checkbox"/> $a = 0$ und $b = -\frac{\pi}{4}$            | <input type="checkbox"/> $a = 0$ und $b = \frac{\pi}{4}$  |

**Frage 17 :** Gegeben sei  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$  mit  $a_k = (-1)^k \frac{k+1}{k^2}$  für  $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ . Dann gilt:

- Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergiert, aber sie konvergiert nicht absolut.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$
- Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konvergiert absolut.



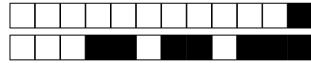
**Frage 18 :** Das bestimmte Integral  $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$  ist

$2 - \frac{5}{e}$

$2 - \frac{3}{e}$

$2 - \frac{1}{e}$

$2 - \frac{4}{e}$



## Zweiter Teil, Wahr/Falsch-Fragen

Markieren Sie bitte für jede der folgenden Fragen die Box WAHR, wenn die Aussage **immer korrekt** ist, oder die Box FALSCH, wenn sie **nicht immer korrekt** ist, d.h. wenn die Aussage manchmal falsch ist.

**Frage 19 :** Sei  $(a_n)_{n \geq 0}$  eine Folge reeller, von Null verschiedener Zahlen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ . Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ .

WAHR       FALSCH

**Frage 20 :** Gegeben sei eine bijektive und monoton steigende Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  auch monoton steigend.

WAHR       FALSCH

**Frage 21 :** Das Integral  $\int_{-1}^1 e^{-\sin(x)} dx$  ist Null.

WAHR       FALSCH

**Frage 22 :** Sei  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Dann gilt: Für jedes  $x_0 \in \mathbb{R}$  und jedes  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , hat  $f$  eine Taylor-Entwicklung vom Grad  $n$  um  $x_0$ .

WAHR       FALSCH

**Frage 23 :** Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar auf  $\mathbb{R}$ . Dann existieren Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$ , so dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - a - bx}{x} = 0.$$

WAHR       FALSCH

**Frage 24 :** Für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| = 1$  ist  $z^5 + \frac{1}{z^5}$  reell (das heisst, der Imaginärteil ist Null).

WAHR       FALSCH

**Frage 25 :** Sei  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $[0, 1]$  und das Bild von  $f$  sei  $[0, 1]$ . Dann gibt es mindestens ein  $x \in [0, 1]$  mit  $f(x) - x = 0$ .

WAHR       FALSCH



**Frage 26 :** Seien  $A, B \subset \mathbb{R}$  zwei nichtleere und beschränkte Mengen. Wenn  $\inf A \leq \inf B$  und  $\sup A \geq \sup B$ , dann gilt  $B \subset A$ .

WAHR       FALSCH

**Frage 27 :** Gegeben sei eine in  $x_0 = 0$  stetige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist die Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x) = xf(x)$  differenzierbar in  $x_0 = 0$ .

WAHR       FALSCH

**Frage 28 :** Seien  $(a_n)_{n \geq 0}$ ,  $(b_n)_{n \geq 0}$  zwei Folgen reeller Zahlen, so dass die Reihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  konvergieren. Dann konvergiert auch die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ .

WAHR       FALSCH



Dritter Teil, Offene Fragen

Beantworten Sie die Fragen im eingerahmten Bereich. In diesem Teil der Prüfung müssen die Lösungen begründet werden: Der Rechenweg muss erkennbar und jeder Schritt begründet sein. Die grau markierten Kästchen bitte frei lassen, sie werden für die Korrektur benötigt.

**Frage 29:** Diese Frage zählt 4 Punkte.

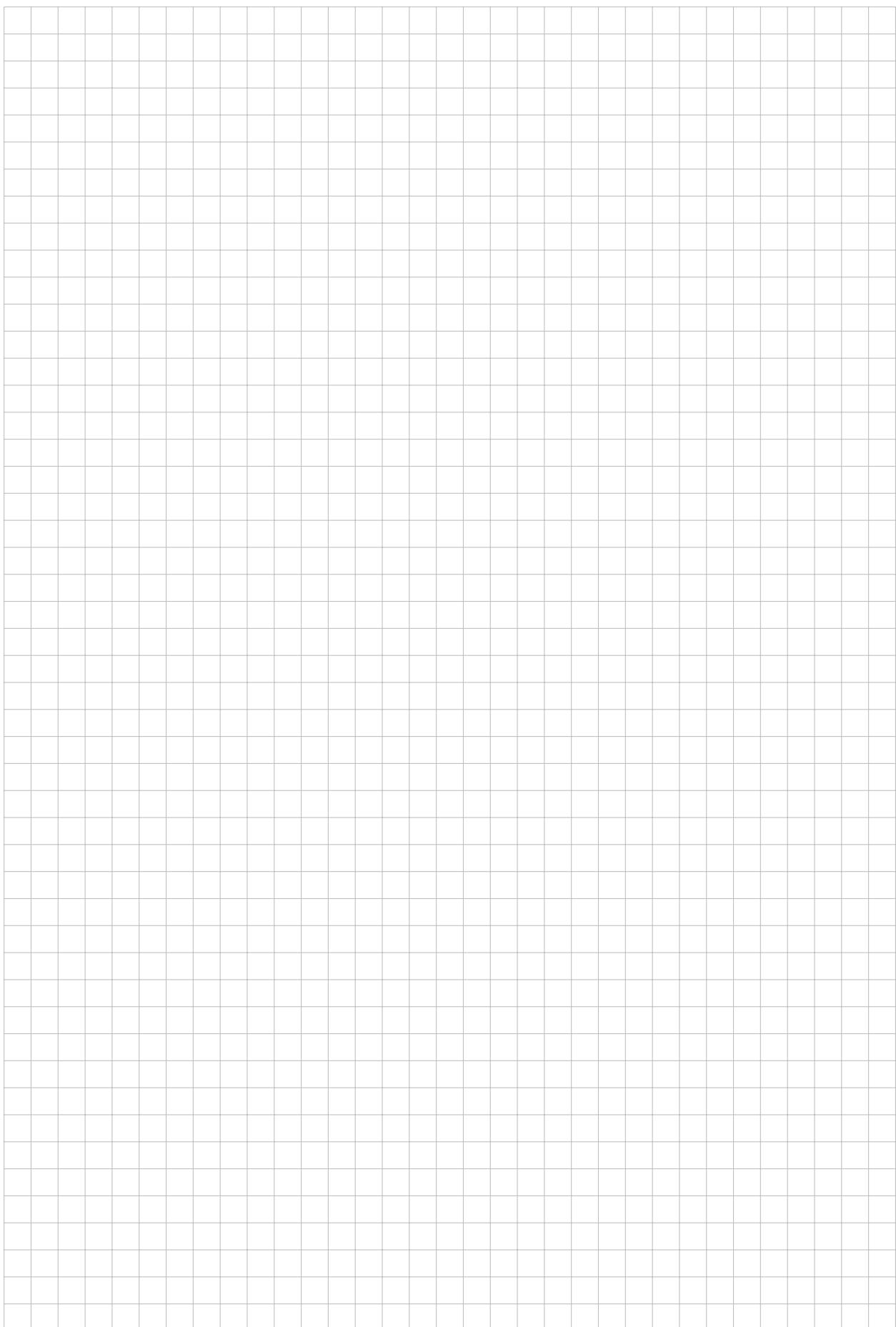
0     1     2     3     4

*Hier nicht schreiben.*

Zeigen Sie, dass die Funktion  $f(x) = e^{(x^2)}$  konvex auf  $[-1, 1]$  ist.



+1/9/52+





**Frage 30:** Diese Frage zählt 8 Punkte.

0     1     2     3     4     5     6     7     8

*Hier nicht schreiben.*

Gegeben sei die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = xe^x - e^x.$$

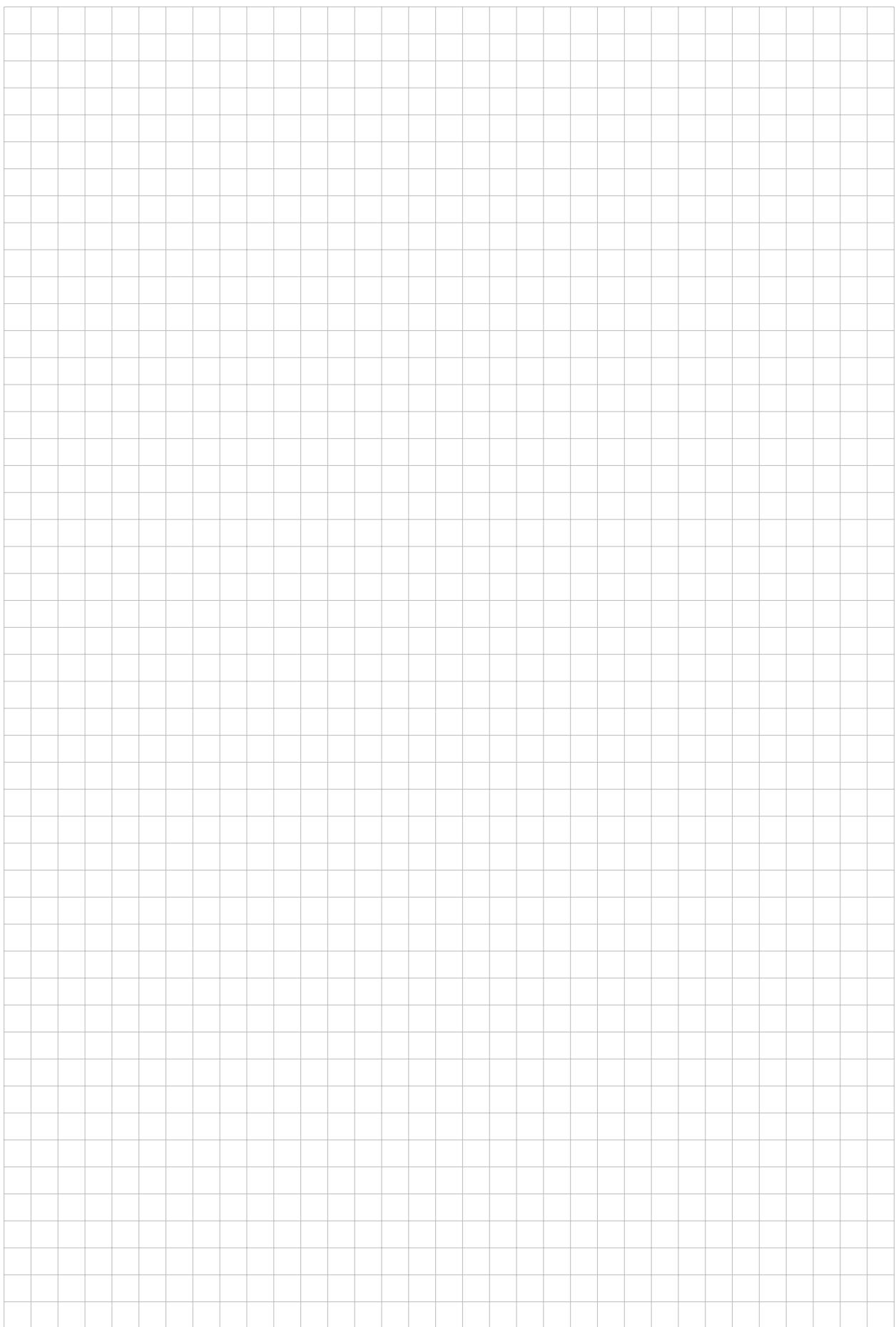
- (a) Zeigen Sie per Induktion, dass für alle  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 1$ , und  $x \in \mathbb{R}$  gilt:

$$f^{(k)}(x) = (k - 1)e^x + xe^x.$$

- (b) Geben Sie die Taylor-Reihe von  $f$  um  $x_0 = 1$  an.  
(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylor-Reihe aus Teil (b). Begründen Sie Ihre Antwort.



+1/11/50+





**Frage 31:** Diese Frage zählt 4 Punkte.

0     1     2     3     4

*Hier nicht schreiben.*

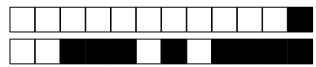
Sei  $f \in C^2([0, 1])$ . Zeigen Sie, dass für jedes  $x_0 \in ]0, 1[$  die folgende Gleichung gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \left( f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0) \right) = f''(x_0).$$

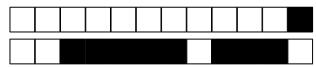


+1/13/48+

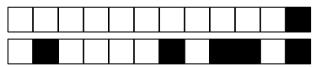




+1/14/47+



+1/15/46+



+1/16/45+