Prof. D. Kressner
Analyse I - (n/a)
17 Januar 2022
3 Stunden

n/a

n/a

SCIPER: **999999**

Drehen Sie diese Seite nicht um, bevor Sie dazu aufgefordert werden. Jedes Blatt hat eine Vorder- und eine Rückseite. Es gibt 12 Seiten (die letzten sind möglicherweise leer), mit 31 Fragen. Lösen Sie nicht die Heftklammern.

- Legen Sie Ihren Studentenausweis auf den Tisch.
- Es sind **keine** weiteren Unterlagen zugelassen.
- Die Nutzung eines **Taschenrechners** oder jedes anderen elektronischen Hilfsmittels ist während der Prüfung nicht gestattet.
- Für die **Multiple Choice** Fragen erhält man:
  $+3$ Punkte, wenn die Antwort richtig ist,
  0 Punkte, wenn die Frage nicht beantwortet ist oder mehrere Möglichkeiten markiert sind,
  -1 Punkt, wenn die Antwort falsch ist.
- Für die **Wahr/Falsch** Fragen erhält man:
  $+1$ Punkt, wenn die Antwort richtig ist,
  0 Punkte, wenn die Frage nicht beantwortet ist oder mehrere Möglichkeiten markiert sind,
  -1 Punkt, wenn die Antwort falsch ist.
- Benutzen Sie einen **Kugelschreiber mit schwarzer oder blauer Tinte** und verwenden Sie Korrekturflüssigkeit (z.B. Tipp-Ex) um bei Bedarf Ihre Antwort zu ändern.
- Falls eine Fragestellung einen Fehler enthält, darf der/die Unterrichtende die entsprechende Frage annulieren.

Erster Teil, Multiple-Choice-Fragen

Markieren Sie bitte für jede Frage die Box, die zu der richtigen Lösung gehört. Es gibt **genau eine** richtige Antwort pro Frage.

Frage 1 : Das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^{1-} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$

- ☐ divergiert
- ☐ konvergiert und ist gleich 0
- ☐ konvergiert und ist gleich -1
- ☐ konvergiert und ist gleich 1

Frage 2 : Für die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x + \sin(x)$ betrachte man die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sei $y_0 = f(\pi)$. Dann gilt:

- ☐ $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = -\dfrac{1}{3}$
- ☐ $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{2\pi - 1}$
- ☐ $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = 1$
- ☐ f^{-1} ist an der Stelle y_0 nicht differenzierbar

Frage 3 : Gegeben sie die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ mit $a_n = \dfrac{(-2)^n(n!)^2}{(2n)!}$. Dann ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

- ☐ konvergent, aber nicht absolut konvergent
- ☐ divergent, weil $|a_n| \to +\infty$
- ☐ absolut konvergent
- ☐ divergent, weil $|a_n| \to 1$

Frage 4 : Die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+4}}(x+1)^n$ konvergiert genau dann wenn $x \in I$ mit:

- ☐ $I = \left]-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right[$
- ☐ $I = \left[-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right]$
- ☐ $I = \left]-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right]$
- ☐ $I = \left]\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right]$

Frage 5 : Sei $I = [-3, 0]$. Gegeben sei die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3e^{\frac{x+3}{3}} - 2$. Dann gilt für alle $x, y \in I$ mit $x < y$:

- ☐ $1 \leq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 3$
- ☐ $-\infty < \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 0$
- ☐ $3 \leq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 3e$
- ☐ $2 \leq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq e$

Frage 6 : Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und sei die Funktion $f\colon\ [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definiert als

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x^2 - 10x - 15}{x^2 - x - 6} & \text{wenn } x > 3\,, \\ a & \text{wenn } x = 3\,, \\ bx^2 + 1 & \text{wenn } 0 \leq x < 3\,. \end{cases}$$

Dann ist f stetig auf $[0, +\infty[$ für:

- ☐ $a = 5,\ b = \frac{4}{9}$
- ☐ $a = 0,\ b = -\frac{1}{9}$
- ☐ $a = 4,\ b = 3$
- ☐ $a = 4,\ b = \frac{1}{3}$

Frage 7 : Das Integral $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\,(x^2+3)}\,\mathrm{d}x$ ist gleich

- ☐ $\frac{1}{3}\operatorname{Log}(2) - \frac{1}{9}\operatorname{Log}\left(\frac{7}{4}\right)$
- ☐ $\operatorname{Log}(2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(2)$
- ☐ $\operatorname{Log}(4) + \operatorname{Log}\left(\frac{7}{2}\right)$
- ☐ $\frac{1}{3}\operatorname{Log}(2) - \frac{1}{6}\operatorname{Log}\left(\frac{7}{4}\right)$

Frage 8 : Gegeben sei die Funktion $f\colon \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x\cos(x)$. Dann ist das Bild von f gleich

- ☐ $[0,1]$
- ☐ $\left]0,\exp\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$
- ☐ $]0,1]$
- ☐ $\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\exp\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

Frage 9 : Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktion mit

$$f'(x) = \frac{x\sin(x)}{\sqrt{x^2+1}-1}$$

für jedes $x \neq 0$. Dann gilt:

- ☐ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = 2$
- ☐ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = +\infty$
- ☐ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{1}{2}$
- ☐ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = 0$

Frage 10 : Sei $z = \dfrac{2\,\mathrm{i}^9 - 4\,\mathrm{i}^{15}}{1-\mathrm{i}}$. Dann gilt:

- ☐ $z^6 = -8\cdot 3^6\,\mathrm{i}$
- ☐ $z^6 = 8\cdot 3^6\,\mathrm{i}$
- ☐ $z^6 = 8\cdot 3^6$
- ☐ $z^6 = 8\cdot 3^6(1+\mathrm{i})$

Frage 11 : Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = e^{-n}\,e^{n^2\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)}$. Dann gilt:

- ☐ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = e$
- ☐ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{e}}$
- ☐ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$
- ☐ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Frage 12 : Sei $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$ die Taylor-Entwicklung vom Grad 3 der Funktion $f(x) = e^{\sin(x)}$ um $x_0 = 0$. Dann ist a_3 gleich

- ☐ 1
- ☐ 0
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{1}{6}$

Frage 13 : Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ mit

$$a_n = \sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}\,.$$

Dann gilt:

- ☐ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ und $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$
- ☐ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -1$ und $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
- ☐ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ und $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
- ☐ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -1$ und $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

Frage 14 : Gegeben sei die Funktion $f\colon\,]-1,1[\, \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} t^n$. Dann gilt:

- ☐ $f'(\frac{1}{2}) = 0$
- ☐ $f'(\frac{1}{2}) = -5$
- ☐ $f'(\frac{1}{2}) = 3$
- ☐ $f'(\frac{1}{2}) = 7$

Frage 15 : Die Taylor-Entwicklung vom Grad 2 der Funktion $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$ um $x_0 = 0$ ist

- ☐ $f(x) = e + e\,x + 3e\,x^2 + o(x^2)$
- ☐ $f(x) = e + e\,x + \frac{3}{2}e\,x^2 + o(x^2)$
- ☐ $f(x) = \frac{5}{2} + 2x + 2x^2 + o(x^2)$
- ☐ $f(x) = \frac{5}{2} + 2x + 4x^2 + o(x^2)$

Frage 16 : Das Integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{\sin(x)} \cos(x)\,\mathrm{d}x$ ist gleich

- ☐ e
- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ $e - 1$

Frage 17 : Sei $A = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}_+^* \text{ so dass } y = e^{-x}\}$ mit $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Dann gilt:

- ☐ $\operatorname{Sup} A = 1$
- ☐ A ist nicht nach oben beschränkt
- ☐ $\operatorname{Sup} A = e$
- ☐ $\operatorname{Inf} A = 1$

Frage 18 : Die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ mit $x_0 = 3$ sei für $n \geq 1$ rekursiv definiert durch $x_n = \frac{3}{4}x_{n-1} + 2$. Dann gilt:

- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 8$
- ☐ $(x_n)_{n\geq 0}$ divergiert
- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2$
- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 3$

Zweiter Teil, Wahr/Falsch-Fragen

Markieren Sie bitte für jede der folgenden Fragen die Box WAHR, wenn die Aussage **immer korrekt** ist, oder die Box FALSCH, wenn sie **nicht immer korrekt** ist, d.h. wenn die Aussage manchmal falsch ist.

Frage 19 : Es existiert eine bijektive und auf $]-1,1[$ stetige Funktion $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 20 : Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere Menge und sei $B = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$. Wenn A nach oben beschränkt ist, dann ist auch B nach oben beschränkt.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 21 : Wenn die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-3)^k$ für $x = 2.8$ konvergiert, dann konvergiert sie auch für $x = 3.1$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 22 : Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 23 : Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen, für welche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 24 : Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine auf $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbare Funktion und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Sei $f(x) = p_n(x) + o(x^n)$ die Taylor-Entwicklung vom Grad n der Funktion f um $x_0 = 0$, wobei p_n ein Polynom vom Grad höchstens n ist. Dann gelten für die (höheren) Ableitungen von f and p_n die Beziehungen

$$f'(0) = p_n'(0), \quad f''(0) = p_n''(0), \quad f^{(3)}(0) = p_n^{(3)}(0), \quad \ldots \quad f^{(n)}(0) = p_n^{(n)}(0).$$

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 25 : Seien $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen und $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 26 : Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine auf $[-1,1]$ stetige Funktion mit $f(-1) = f(1)$. Dann existiert $x_0 \in \,]-1,1[$ so dass $f'(x_0) = 0$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 27 : Es existiert eine auf $[0,1]$ stetige Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^+$ mit $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 28 : Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine auf $\mathbb{R}$ stetige Funkton und sei $(a_n)_{n\geq 1}$ die mittels $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ definierte Folge. Dann ist $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Dritter Teil, Offene Fragen

Schreiben Sie Ihre Antworten im eingerahmten karierten Bereich. In diesem Teil der Prüfung müssen die Lösungen begründet werden: Der Rechenweg muss erkennbar und jeder Schritt begründet sein. Die grau markierten Kästchen bitte frei lassen, sie werden für die Korrektur benötigt.

Frage 29: *Diese Frage zählt 5 Punkte.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 *Hier nicht schreiben.*

Zeigen Sie, dass die Taylor-Entwicklung vom Grad 3 von der Funktion $f(x) = \tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ um $x_0 = 0$ durch

$$f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

gegeben ist. Hinweis: $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

Frage 30: *Diese Frage zählt 8 Punkte.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 *Hier nicht schreiben.*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \mathrm{Log}(x) - \mathrm{Log}(2)$ und $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

(a) Zeigen Sie per Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, und $x \in \mathbb{R}_+^*$ gilt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

(b) Geben Sie die Taylor-Reihe von f um $x_0 = 2$ an und bestimmen Sie ihren Konvergenzradius.

Frage 31: *Diese Frage zählt 3 Punkte.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 *Hier nicht schreiben.*

Sei $f \in C^1(]0,1[)$. Zeigen Sie, dass für jedes $x_0 \in]0,1[$ die folgende Gleichung gilt:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\Big(\frac{1}{12}f(x_0-2h) - \frac{2}{3}f(x_0-h) + \frac{2}{3}f(x_0+h) - \frac{1}{12}f(x_0+2h)\Big) = f'(x_0).$$