

**EPFL**

Prof. D. Kressner
Analyse I - (n/a)
17 Januar 2022
3 Stunden

n/a

n/a

SCIPER: **999999**

Drehen Sie diese Seite nicht um, bevor Sie dazu aufgefordert werden. Jedes Blatt hat eine Vorder- und eine Rückseite. Es gibt 12 Seiten (die letzten sind möglicherweise leer), mit 31 Fragen. Lösen Sie nicht die Heftklammern.

- Legen Sie Ihren Studentenausweis auf den Tisch.
- Es sind **keine** weiteren Unterlagen zugelassen.
- Die Nutzung eines **Taschenrechners** oder jedes anderen elektronischen Hilfsmittels ist während der Prüfung nicht gestattet.
- Für die **Multiple Choice** Fragen erhält man:
 - +3 Punkte, wenn die Antwort richtig ist,
 - 0 Punkte, wenn die Frage nicht beantwortet ist oder mehrere Möglichkeiten markiert sind,
 - 1 Punkt, wenn die Antwort falsch ist.
- Für die **Wahr/Falsch** Fragen erhält man:
 - +1 Punkt, wenn die Antwort richtig ist,
 - 0 Punkte, wenn die Frage nicht beantwortet ist oder mehrere Möglichkeiten markiert sind,
 - 1 Punkt, wenn die Antwort falsch ist.
- Benutzen Sie einen **Kugelschreiber mit schwarzer oder blauer Tinte** und verwenden Sie Korrekturflüssigkeit (z.B. Tipp-Ex) um bei Bedarf Ihre Antwort zu ändern.
- Falls eine Fragestellung einen Fehler enthält, darf der/die Unterrichtende die entsprechende Frage annulieren.

Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>		



Erster Teil, Multiple-Choice-Fragen

Markieren Sie bitte für jede Frage die Box, die zu der richtigen Lösung gehört. Es gibt genau eine richtige Antwort pro Frage.

Frage 1 : Das uneigentliche Integral $\int_0^{1-} \frac{1}{1-x} dx$

- divergiert konvergiert und ist gleich 0
 konvergiert und ist gleich -1 konvergiert und ist gleich 1

Frage 2 : Für die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x + \sin(x)$ betrachte man die Umkehrfunktion $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $y_0 = f(\pi)$. Dann gilt:

- $(f^{-1})'(y_0) = -\frac{1}{3}$
 $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{2\pi - 1}$
 $(f^{-1})'(y_0) = 1$
 f^{-1} ist an der Stelle y_0 nicht differenzierbar

Frage 3 : Gegeben sie die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ mit $a_n = \frac{(-2)^n(n!)^2}{(2n)!}$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

- konvergent, aber nicht absolut konvergent
 divergent, weil $|a_n| \rightarrow +\infty$
 absolut konvergent
 divergent, weil $|a_n| \rightarrow 1$

Frage 4 : Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+4}}(x+1)^n$ konvergiert genau dann wenn $x \in I$ mit:

- $I =]-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}[$ $I = [-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}]$ $I =]-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}]$ $I =]\frac{1}{3}, \frac{5}{3}]$

Frage 5 : Sei $I = [-3, 0]$. Gegeben sei die Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3e^{\frac{x+3}{3}} - 2$. Dann gilt für alle $x, y \in I$ mit $x < y$:

- $1 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 3$ $-\infty < \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 0$
 $3 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 3e$ $2 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq e$

Frage 6 : Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und sei die Funktion $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definiert als

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5x^2 - 10x - 15}{x^2 - x - 6} & \text{wenn } x > 3, \\ a & \text{wenn } x = 3, \\ bx^2 + 1 & \text{wenn } 0 \leq x < 3. \end{cases}$$

Dann ist f stetig auf $[0, +\infty[$ für:

- $a = 5, b = \frac{4}{9}$ $a = 0, b = -\frac{1}{9}$ $a = 4, b = 3$ $a = 4, b = \frac{1}{3}$



Frage 7 : Das Integral $\int_1^2 \frac{1}{x(x^2 + 3)} dx$ ist gleich

$\frac{1}{3} \operatorname{Log}(2) - \frac{1}{9} \operatorname{Log}\left(\frac{7}{4}\right)$

$\operatorname{Log}(4) + \operatorname{Log}\left(\frac{7}{2}\right)$

$\operatorname{Log}(2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(2)$

$\frac{1}{3} \operatorname{Log}(2) - \frac{1}{6} \operatorname{Log}\left(\frac{7}{4}\right)$

Frage 8 : Gegeben sei die Funktion $f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x \cos(x)$. Dann ist das Bild von f gleich

$[0, 1]$

$]0, \exp\left(\frac{\pi}{4}\right)]$

$]0, 1]$

$\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

Frage 9 : Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf \mathbb{R} stetig differenzierbare Funktion mit

$$f'(x) = \frac{x \sin(x)}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$$

für jedes $x \neq 0$. Dann gilt:

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 2$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{2}$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = +\infty$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0$

Frage 10 : Sei $z = \frac{2i^9 - 4i^{15}}{1-i}$. Dann gilt:

$z^6 = -8 \cdot 3^6 i$

$z^6 = 8 \cdot 3^6 i$

$z^6 = 8 \cdot 3^6$

$z^6 = 8 \cdot 3^6(1+i)$

Frage 11 : Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n = e^{-n} e^{n^2 \operatorname{Log}(1 + \frac{1}{n})}$. Dann gilt:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = e$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

Frage 12 : Sei $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)$ die Taylor-Entwicklung vom Grad 3 der Funktion $f(x) = e^{\sin(x)}$ um $x_0 = 0$. Dann ist a_3 gleich

1

0

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{6}$

Frage 13 : Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ mit

$$a_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}.$$

Dann gilt:

$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ und $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$

$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -1$ und $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ und $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -1$ und $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

Frage 14 : Gegeben sei die Funktion $f:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(t) = \sum_{n=2}^{\infty} t^n$. Dann gilt:

$f'(\frac{1}{2}) = 0$

$f'(\frac{1}{2}) = -5$

$f'(\frac{1}{2}) = 3$

$f'(\frac{1}{2}) = 7$



Frage 15 : Die Taylor-Entwicklung vom Grad 2 der Funktion $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$ um $x_0 = 0$ ist

- $f(x) = e + e x + 3e x^2 + o(x^2)$
 $f(x) = \frac{5}{2} + 2x + 2x^2 + o(x^2)$

- $f(x) = e + e x + \frac{3}{2}e x^2 + o(x^2)$
 $f(x) = \frac{5}{2} + 2x + 4x^2 + o(x^2)$

Frage 16 : Das Integral $\int_0^{\pi/2} e^{\sin(x)} \cos(x) dx$ ist gleich

- e 0 1 $e - 1$

Frage 17 : Sei $A = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}_+^* \text{ so dass } y = e^{-x}\}$ mit $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Dann gilt:

- $\text{Sup } A = 1$ A ist nicht nach oben beschränkt
 $\text{Sup } A = e$ $\text{Inf } A = 1$

Frage 18 : Die Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ mit $x_0 = 3$ sei für $n \geq 1$ rekursiv definiert durch $x_n = \frac{3}{4}x_{n-1} + 2$. Dann gilt:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 8$ $(x_n)_{n \geq 0}$ divergiert
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 3$



Zweiter Teil, Wahr/Falsch-Fragen

Markieren Sie bitte für jede der folgenden Fragen die Box WAHR, wenn die Aussage **immer korrekt** ist, oder die Box FALSCH, wenn sie **nicht immer korrekt** ist, d.h. wenn die Aussage manchmal falsch ist.

Frage 19 : Es existiert eine bijektive und auf $]-1, 1[$ stetige Funktion $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$.

WAHR FALSCH

Frage 20 : Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere Menge und sei $B = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$. Wenn A nach oben beschränkt ist, dann ist auch B nach oben beschränkt.

WAHR FALSCH

Frage 21 : Wenn die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-3)^k$ für $x = 2.8$ konvergiert, dann konvergiert sie auch für $x = 3.1$.

WAHR FALSCH

Frage 22 : Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

WAHR FALSCH

Frage 23 : Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen, für welche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = 0$.

WAHR FALSCH

Frage 24 : Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf \mathbb{R} unendlich oft differenzierbare Funktion und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Sei $f(x) = p_n(x) + o(x^n)$ die Taylor-Entwicklung vom Grad n der Funktion f um $x_0 = 0$, wobei p_n ein Polynom vom Grad höchstens n ist. Dann gelten für die (höheren) Ableitungen von f und p_n die Beziehungen

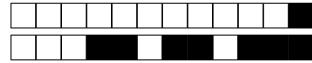
$$f'(0) = p'_n(0), \quad f''(0) = p''_n(0), \quad f^{(3)}(0) = p^{(3)}_n(0), \quad \dots \quad f^{(n)}(0) = p^{(n)}_n(0).$$

WAHR FALSCH

Frage 25 : Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf \mathbb{R} stetig differenzierbare Funktionen und $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

WAHR FALSCH



Frage 26 : Sei $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf $[-1, 1]$ stetige Funktion mit $f(-1) = f(1)$. Dann existiert $x_0 \in]-1, 1[$ so dass $f'(x_0) = 0$.

- WAHR FALSCH

Frage 27 : Es existiert eine auf $[0, 1]$ stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

- WAHR FALSCH

Frage 28 : Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf \mathbb{R} stetige Funktion und sei $(a_n)_{n \geq 1}$ die mittels $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ definierte Folge. Dann ist $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Cauchy-Folge.

- WAHR FALSCH



Dritter Teil, Offene Fragen

Schreiben Sie Ihre Antworten im eingerahmten karierten Bereich. In diesem Teil der Prüfung müssen die Lösungen begründet werden: Der Rechenweg muss erkennbar und jeder Schritt begründet sein. Die grau markierten Kästchen bitte frei lassen, sie werden für die Korrektur benötigt.

Frage 29: Diese Frage zählt 5 Punkte.

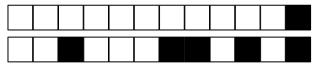
0 1 2 3 4 5

Hier nicht schreiben.

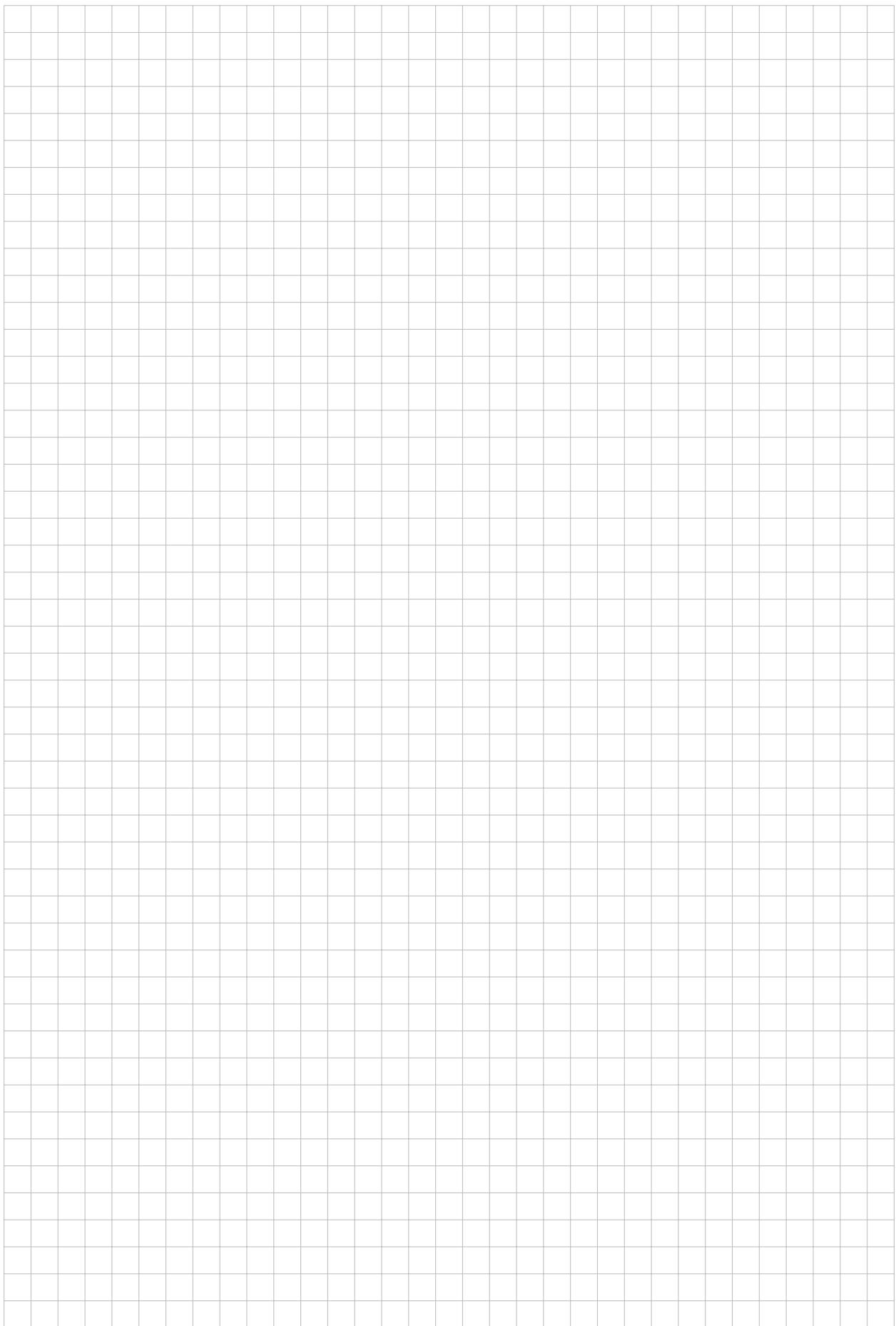
Zeigen Sie, dass die Taylor-Entwicklung vom Grad 3 von der Funktion $f(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ um $x_0 = 0$ durch

$$f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

gegeben ist. Hinweis: $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.



+1/8/53+





Frage 30: Diese Frage zählt 8 Punkte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8

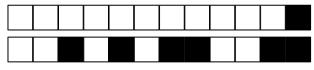
Hier nicht schreiben.

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \text{Log}(x) - \text{Log}(2)$ und $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

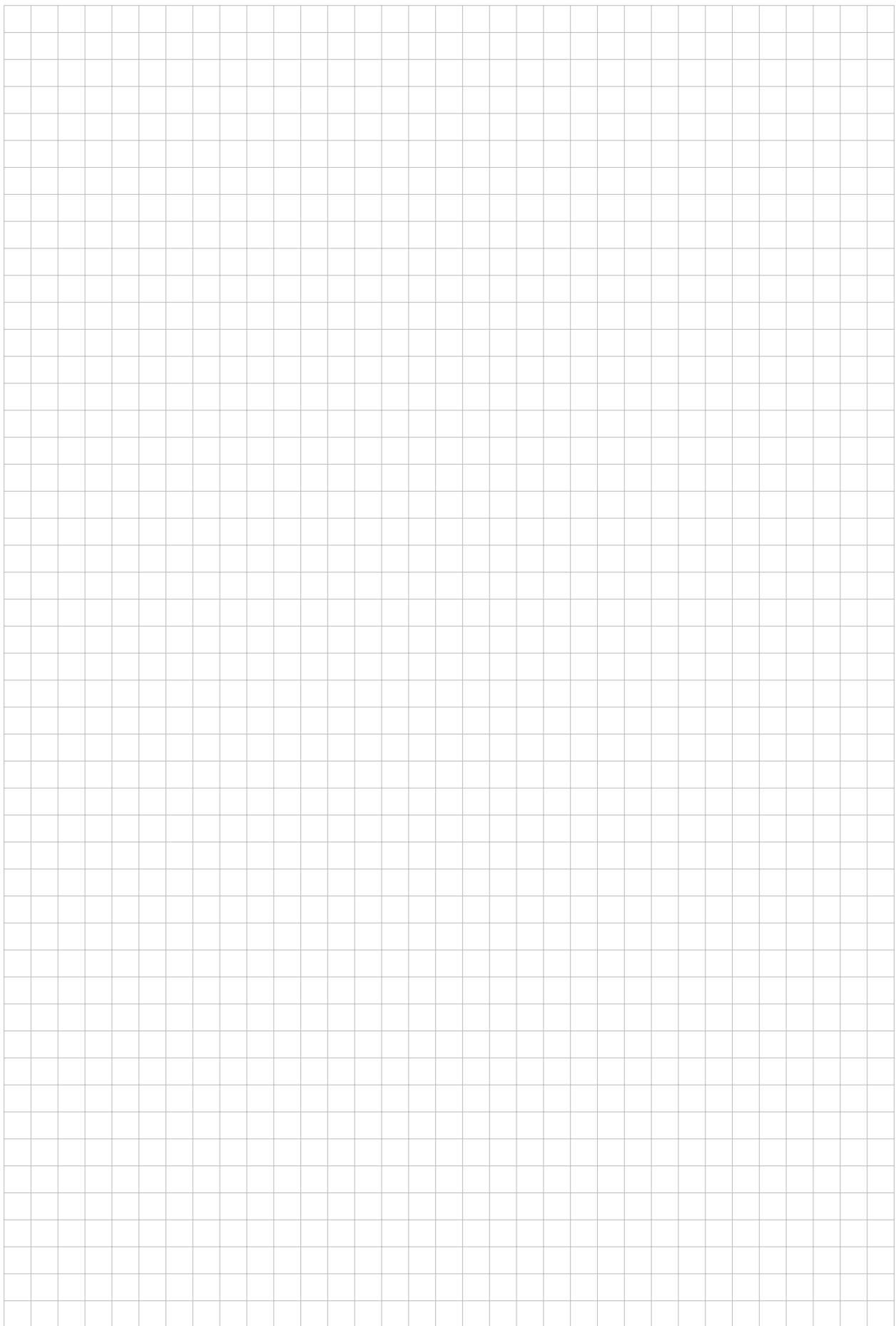
- (a) Zeigen Sie per Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, und $x \in \mathbb{R}_+^*$ gilt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

- (b) Geben Sie die Taylor-Reihe von f um $x_0 = 2$ an und bestimmen Sie ihren Konvergenzradius.



+1/10/51+





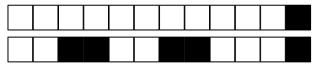
Frage 31: Diese Frage zählt 3 Punkte.

0 1 2 3

Hier nicht schreiben.

Sei $f \in C^1(]0, 1[)$. Zeigen Sie, dass für jedes $x_0 \in]0, 1[$ die folgende Gleichung gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{12}f(x_0 - 2h) - \frac{2}{3}f(x_0 - h) + \frac{2}{3}f(x_0 + h) - \frac{1}{12}f(x_0 + 2h) \right) = f'(x_0).$$



+1/12/49+

