Leh.: K.-D. Semmler - Analysis I - (n/a)

15 Januar 2018 - Dauer: 3 Stunden

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

n/a

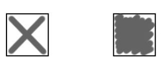
n/a

SCIPER: **999999**

Drehen Sie diese Seite nicht um, bevor Sie dazu aufgefordert werden. Jedes Blatt hat eine Vorder- und eine Rückseite. Es gibt 12 Seiten, die letzten sind möglicherweise leer. Lösen Sie nicht die Heftklammern.

- Legen Sie Ihren Studentenausweis auf den Tisch.
- Es sind **keine** weiteren Unterlagen zugelassen.
- Die Nutzung eines **Taschenrechners** oder jedes anderen elektronischen Hilfsmittels ist während der Prüfung nicht gestattet.
- Für die **Multiple Choice** Fragen erhält man:
  - +3 Punkte, wenn die Antwort richtig ist,
  - 0 Punkte, wenn die Frage nicht beantwortet ist oder mehrere Möglichkeiten angekreuzt sind, und
  - −1 Punkt, wenn die Antwort falsch ist.
- Für die **Wahr/Falsch** Fragen erhält man:
  - +1 Punkt, wenn die Antwort richtig ist,
  - 0 Punkte, wenn die Frage nicht beantwortet ist oder mehrere Möglichkeiten angekreuzt sind, und
  - −1 Punkt, wenn die Antwort falsch ist.
- Benutzen Sie einen **Kugelschreiber mit schwarzer oder blauer Tinte** und verwenden Sie Korrekturflüssigkeit (z.B. Tipp-Ex) um bei Bedarf Ihre Antwort zu ändern.
- Falls eine Fragestellung einen Fehler enthält, darf der/die Unterrichtende die entsprechende Frage annulieren.
- Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien zum Markieren **der Antworten**:

oui | ja | sì | yes



non | nein | non | no

Erster Teil, Multiple-Choice-Fragen

Kreuzen Sie bitte für jede Frage die Box an, die zu der richtigen Lösung gehört. Es gibt **genau eine** richtige Antwort pro Frage.

Frage 1 : Betrachte die Reihe S gegeben durch

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{cn}} \,.$$

mit einem Parameter $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- ☐ S konvergiert genau dann wenn $2 > c > 0$
- ☐ S konvergiert genau dann wenn $c \geq 1$
- ☐ S konvergiert genau dann wenn $c > 3$
- ☐ S konvergiert genau dann wenn $c \geq 0$

Frage 2 : Betrachte die komplexe Zahl $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}/3}$. Dann gilt:

- ☐ $|z| = \sqrt{2 + 2\cos(\frac{2}{3})}$
- ☐ $|z| = \sqrt{1 + \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}/3} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}/3}\right)}$
- ☐ $|z| = \sqrt{2}$
- ☐ $|z| = \sqrt{2 + 2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}/3} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}/3}\right)}$

Frage 3 : Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{wenn } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{wenn } x = 0\,. \end{cases}$$

Dann gilt:

- ☐ f ist ein mal differenzierbar auf $\mathbb{R}$, aber nicht zwei mal auf $\mathbb{R}$.
- ☐ f ist zwei mal differenzierbar auf $\mathbb{R}$, aber nicht drei mal.
- ☐ f ist nicht differenzierbar auf $\mathbb{R}$.
- ☐ f ist drei mal differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

Frage 4 : Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)(x+2) & \text{wenn } x < 0\,, \\ \alpha x + \beta & \text{wenn } x \geq 0\,, \end{cases}$$

differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist. Dann gilt:

- ☐ $f(2) = 12$
- ☐ $f'(2) = 2$
- ☐ $f(3) = 9$
- ☐ $f(-3) + f(1) = 7$

Frage 5 : Setze

$$I = \int_1^{e^3} \frac{\mathrm{Log}(x)}{x\sqrt{\big(\mathrm{Log}(x)\big)^2+1}}\,\mathrm{d}x\ .$$

Dann gilt:

- ☐ $I = 2\,(\sqrt{10}-1)$
- ☐ $I = \sqrt{10}-1$
- ☐ $I = \sqrt{10}+1$
- ☐ $I = \frac{1}{2}\,(\sqrt{10}-1)$

Frage 6 : Gegeben sei die Funktion $f\colon [-1,3\,] \to [-1,3\,]$ definiert durch

$$f(x) = \sqrt{|x-1|+2x}\ .$$

Dann gilt:

- ☐ f ist injektiv
- ☐ f ist surjektiv
- ☐ f ist differenzierbar auf $]-1,3\,[$
- ☐ f ist unstetig in $x=1$

Frage 7 : Betrachte die Funktion $f\colon\ ]-\pi,\pi[\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{e^{\cos(x)-1} - 1 - x^2}{\big(\sin(x)\big)^2}\ .$$

Dann gilt:

- ☐ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$
- ☐ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\frac{3}{2}$
- ☐ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$
- ☐ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{2}$

Frage 8 : Betrachte das uneigentliche (verallgemeinerte) Integral

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,\mathrm{d}x\ .$$

Dann gilt:

- ☐ Das Integral I divergiert
- ☐ $I = 2\ \mathrm{Log}\left(\frac{e-1}{e+1}\right)$
- ☐ $I = \frac{1}{2}\ \mathrm{Log}\left(\frac{e+1}{e-1}\right)$
- ☐ $I = -\,\mathrm{Log}\left(e^2-1\right)$

Frage 9 : Gegeben sei die Funktion $f\colon\ [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sin(x)\,\mathrm{e}^{-x}$. Dann gilt:

- ☐ f nimmt sein Minimum in $x = 0$ und sein Maximum in $x = \dfrac{\pi}{4}$ an.
- ☐ f nimmt sein Minimum in $x = \dfrac{5\pi}{4}$ und sein Maximum in $x = \dfrac{\pi}{4}$ an.
- ☐ f nimmt sein Minimum in $x = 0$, in $x = \pi$ und in $x = 2\pi$ an.
- ☐ f nimmt sein Minimum in $x = \dfrac{3\pi}{2}$ und sein Maximum in $x = \dfrac{\pi}{2}$ an.

Frage 10 : Betrachte die Menge $E \subset \mathbb{R}$,

$$E = \left\{ \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right) : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \right\} .$$

Dann gilt:

- ☐ $\operatorname{Inf} E = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- ☐ $\operatorname{Inf} E = 0$
- ☐ $\operatorname{Inf} E = -1$
- ☐ $\operatorname{Inf} E = -1 - \sin\left(\dfrac{\pi}{24}\right)$

Frage 11 : Sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe S, definiert durch

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{5^{k+3}}\, x^k .$$

Dann gilt:

- ☐ $R = 5$
- ☐ $R = \dfrac{1}{5}$
- ☐ $R = 0$
- ☐ $R = 25$

Frage 12 : Zu einer Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren wir eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $a_0 = 1$ und $a_n = g(a_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Es konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wenn g gegeben ist durch:

- ☐ $g(x) = 2x - 2$
- ☐ $g(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + 1$
- ☐ $g(x) = x + 1$
- ☐ $g(x) = -x^2 + 2x - 2$

Frage 13 : Betrachte die Funktion $f\colon]\,0,\infty\,[\ \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = 2 + \operatorname{Log}\left(\frac{2\mathrm{e}+x}{x^2}\right).$$

Sei f^{-1} die inverse Funktion von f und $y_0 := f(2\mathrm{e})$. Dann gilt:

- ☐ $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{3}{4\mathrm{e}}$
- ☐ $(f^{-1})'(y_0) = -\dfrac{4\mathrm{e}}{3}$
- ☐ $(f^{-1})'(y_0) = -\dfrac{1}{2\mathrm{e}+1}$
- ☐ $(f^{-1})'(y_0) = 2\mathrm{e}+1$

Frage 14 : Sei $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^3\,\varepsilon(x)$ mit $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$ die Taylor-Entwicklung dritter Ordnung der Funktion $f\colon\ ]-1,1[\ \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

um $x = 0$. Dann gilt:

- ☐ $a_3 = 1$
- ☐ $a_3 = \dfrac{5}{6}$
- ☐ $a_3 = -\dfrac{1}{6}$
- ☐ $a_3 = 5$

Frage 15 : Betrachte die Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n = \frac{\operatorname{Log}(n+\mathrm{e}^n)}{n+1}.$$

Dann gilt:

- ☐ a_n ist eine beschränkte Folge und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
- ☐ a_n ist eine unbeschränkte Folge.
- ☐ a_n ist eine beschränkte Folge und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$
- ☐ a_n ist eine beschränkte Folge und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}$

Frage 16 : Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(e^{\frac{1}{x}}\right)}{e^{\frac{1}{x}}} & \text{wenn } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{wenn } x = 0\,, \end{cases}$$

und sei $g\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ die Einschränkung von f auf $[0,\infty[$ und $h\colon]-\infty,0] \to \mathbb{R}$ die Einschränkung von f auf $]-\infty,0]$. Dann gilt:

- ☐ $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = -\infty$
- ☐ $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$
- ☐ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$
- ☐ $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$

Frage 17 : Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$, die Folge der Partialsummen. Wenn nun $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 1$, dann gilt:

- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} (s_{2n} - 2s_n) = 0$
- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$
- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{2n} < 1$
- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} (s_{2n} - s_n) = 0$

Frage 18 : Setze

$$I = \int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-4x+4x^2}}\, \mathrm{d}x\ .$$

Dann gilt:

- ☐ $I = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(6-\sqrt{33}\right)$
- ☐ $I = \frac{1}{2}\operatorname{Log}(5)$
- ☐ $I = -\frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$
- ☐ $I = -\frac{1}{2}\operatorname{Log}(5)$

Zweiter Teil, Wahr/Falsch-Fragen

Kreuzen Sie bitte für jede der folgenden Fragen die Box WAHR an, wenn die Aussage **immer korrekt** ist, oder die Box FALSCH, wenn sie **nicht immer korrekt** ist, d.h. wenn die Aussage manchmal falsch ist.

Frage 19 : Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen so, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $b_n = \cos(a_n)$ konvergiert. Dann konvergiert die Folge (a_n).

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 20 : Sei $f\colon [1,2] \to \mathbb{R}$ eine Funktion so dass $f\big([1,2]\big) = \,]1,2[$. Dann ist f nicht stetig auf $[1,2]$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 21 : Der Wert des Integrals $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin\big(x^{13}\big)\,\mathrm{d}x$ ist Null.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 22 : Seien $A \subset \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}$ zwei beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ so dass $A \cap B \neq \emptyset$ (leere Menge). Dann gilt $\operatorname{Inf} A \leq \operatorname{Inf} A \cap B$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 23 : Sei $f\colon\ ]-1,1[\ \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die folgende Taylor-Entwicklung in $x = 0$ hat: $f(x) = x - 2x^3 + x^3\varepsilon(x)$, mit $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Dann gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 0.$$

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 24 : Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - 2h)}{h} = 2f'(x_0)\,.$$

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 25 : Die Funktion $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sin\Big(\dfrac{e^x - 1}{x}\Big)$ kann in $x = 0$ stetig fortgesetzt werden.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 26 : Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Menge und $c = \operatorname{Sup} A$. Dann gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $x \in A$ so dass $x + \varepsilon \geq c$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 27 : Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen die stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf $]a, b[$ sind, so dass $f'(x) \leq g'(x)$ für alle $x \in\,]a, b[$. Dann gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in\,]a, b]$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 28 : Sei $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine divergente Reihe und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen so dass $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Dann konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Dritter Teil

Instruktionen:

- Dieser Teil entspricht **20%** der Prüfung.
- Im Allgemeinen sind die Fragen nicht Multiple Choice.
- Dennoch müssen die Antworten in die dazugehörigen Boxen eingetragen werden!
- Verwenden Sie die Rückseiten als Arbeitsflächen. Nur die Antworten in den Boxen werden berücksichtigt!
- Lassen Sie die Kästchen auf grauem Grund frei: Sie sind für die Korrektur vorgesehen.
- Manchmal sind mehrere Antworten richtig, oder auch keine!

Frage A : *Diese Frage wird mit bis zu 9 Punkten bewertet.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 *Hier nicht schreiben.*

Ergänzen Sie diese Tabelle mit Beispielen von Folgen reeller Zahlen (eine pro Linie), die die angegebenen Eigenschaften haben.
(Die Bildmenge einer Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist die Menge $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$.)

beschränkt aber nicht konvergent	
beschränkt aber ohne konvergente Teilfolge	
unbeschränkt aber mit konvergenter Teilfolge	
konvergent mit abgeschlossener Bildmenge	
divergent mit abgeschlossener Bildmenge	
konvergent mit nicht-abgeschlossener Bildmenge	
divergent mit nicht-abgeschlossener Bildmenge	
konvergent mit endlicher Bildmenge	
divergent mit endlicher Bildmenge	

In jeder Linie der Tabelle: wenn eine solche Folge nicht existiert, deuten Sie dies durch ein Kreuz an.

Frage B : *Diese Frage wird mit bis zu 7 Punkten bewertet.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 *Hier nicht schreiben.*

Ergänzen Sie diese Tabelle mit Beispielen von geraden ($f(-x) = f(x)$) Funktionen $f\colon\ ]-2,2[\ \to \mathbb{R}$ (eine pro Linie), die die angegebenen Eigenschaften haben.
(x ist Nullstelle von f wenn $f(x) = 0$)

beschränkt aber nicht stetig	
stetig aber nicht überall differenzierbar	
differenzierbar aber nirgends $f'(x_0) = 0$	
unbeschränkt	
stetig ohne Nullstelle	
ohne Nullstelle und $f(0) \cdot f(1) < 0$	
monoton	

In jeder Linie der Tabelle: wenn eine solche Funktion nicht existiert, deuten Sie dies durch ein Kreuz an.