T. Schmid
Analysis I - (n/a)
15 Januar 2024
3 Stunden 30 Minuten

n/a

SCIPER: **999999**

Drehen Sie diese Seite nicht um, bevor Sie dazu aufgefordert werden. Jedes Blatt hat eine Vorder- und eine Rückseite. Es gibt 16 Seiten, die letzten sind möglicherweise leer. Lösen Sie nicht die Heftklammern.

- Legen Sie Ihren Studentenausweis auf den Tisch.
- Es sind **keine** weiteren Unterlagen zugelassen.
- Die Nutzung eines **Taschenrechners** oder jedes anderen elektronischen Hilfsmittels ist während der Prüfung nicht gestattet.
- Für die **Multiple Choice** Fragen erhält man:
  $+3$ Punkte, wenn die Antwort richtig ist,
  0 Punkte, wenn die Frage nicht beantwortet ist oder mehrere Möglichkeiten markiert sind,
  -1 Punkt, wenn die Antwort falsch ist.
- Für die **Wahr/Falsch** Fragen erhält man:
  $+1$ Punkt, wenn die Antwort richtig ist,
  0 Punkte, wenn die Frage nicht beantwortet ist oder mehrere Möglichkeiten markiert sind,
  -1 Punkt, wenn die Antwort falsch ist.
- Benutzen Sie einen **Kugelschreiber mit schwarzer oder blauer Tinte** und verwenden Sie Korrekturflüssigkeit (z.B. Tipp-Ex) um bei Bedarf Ihre Antwort zu ändern.
- Falls eine Fragestellung einen Fehler enthält, darf der/die Unterrichtende die entsprechende Frage annulieren.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Erster Teil, Multiple-Choice-Fragen

Markieren Sie bitte für jede Frage die Box, die zu der richtigen Lösung gehört. Es gibt **genau eine** richtige Antwort pro Frage.

Frage [`SCQ-induction-A`] : Sei $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch

$$f(x) = (x+1)\sin(x) + \cos(x) + e^{\sin(x)}.$$

Dann ist die Bildmenge von f gegeben durch

■ $[0, 1 + \frac{\pi}{2} + e]$ ☐ $[0, 2]$ ☐ $[\pi - 2, 2]$ ☐ $[0, 2 + \pi + e]$

Frage [`SCQ-inf-sup-C`] : Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ die Folge definiert durch $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ und $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Dann gilt :

☐ $\operatorname{Inf} A = -1$ und $\operatorname{Sup} A = 1$ ☐ $\operatorname{Inf} A = 0$ und $\operatorname{Sup} A = \frac{3}{2}$

☐ $\operatorname{Inf} A = 0$ und $\operatorname{Sup} A = 1$ ■ $\operatorname{Inf} A = -1$ und $\operatorname{Sup} A = \frac{3}{2}$

Frage [`SCQ-complexes-B`] : Eine Lösung der Gleichung $z^5 = \left(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)^2$ ist gegeben durch

■ $z = \sqrt[5]{4}\,\left(\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{15}\right)\right)$ ☐ $z = \sqrt[5]{2}\,\left(\cos\left(\frac{16\pi}{15}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{16\pi}{15}\right)\right)$

☐ $z = \sqrt[5]{4}\,\left(\cos\left(\frac{16\pi}{15}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{16\pi}{15}\right)\right)$ ☐ $z = \sqrt[5]{2}\,\left(\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{15}\right)\right)$

Frage [`SCQ-suites-convergence-B`] : Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ die Folge definiert durch

$$x_n = \left(\cos\left(\sqrt{\tfrac{2}{n}}\,\right)\right)^n.$$

Dann ergibt der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ den Wert

■ $\dfrac{1}{e}$ ☐ 0 ☐ 1 ☐ e

Frage [`SCQ-suites-recurrence-B`] : Sei $(u_n)_{n\geq 0}$ die Folge definiert durch $u_0 = 1$ und $u_n = -\frac{2}{3}u_{n-1} + 2$ für $n \geq 1$. Dann gilt :

■ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{6}{5}$ ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

☐ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$ ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$

Frage [`SCQ-serie-A`] : Sei $a_k = (-1)^k\,\dfrac{k+2}{k^3}$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 0$ und $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Dann gilt :

■ Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ konvergiert absolut

☐ Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ konvergiert, aber konvergiert nicht absolut

☐ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$

☐ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$

Katalog

Frage [`SCQ-limsup-liminf-B`] : Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ die Folge definiert durch

$$a_n = (-1)^{n+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{n}\,.$$

Dann gilt :

- ■ $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -1$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$
- □ $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{4}$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$
- □ $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -1$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$
- □ $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{4}$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{7}{2}$

Frage [`SCQ-parametre-A`] : Für $x \in \,]0,1[\cup]1,+\infty[$ sei im Folgenden die vom Parameter x abhängige Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log(x))^n}$$

definiert. Diese Reihe konvergiert genau dann, wenn

- □ $x \in \left]\frac{1}{e},1\right[\cup]1,e[$
- □ $x \in \,]e,+\infty[$
- □ $x \in \left]0,\frac{1}{e}\right[$
- ■ $x \in \left]0,\frac{1}{e}\right[\cup]e,+\infty[$

Frage [`SCQ-limit-prolongmt-B`] : Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \left|4-x^2\right| & \text{falls } x \leq 0\,,\\ 4\left|x^2-1\right| & \text{falls } x > 0\,. \end{cases}$$

Dann gilt :

- ■ f ist stetig auf $\mathbb{R}$
- □ f ist nicht stetig in $x=-2$
- □ f ist nicht stetig in $x=0$
- □ f ist nicht stetig in $x=1$

Frage [`SCQ-val-intermed-image-interv-B`] : Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nicht-leeres Intervall in $\mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\mathrm{Im}(f)$ die Bildmenge von f. Welche der folgenden Aussagen ist wahr für jede mögliche Wahl von I und f ?

- □ Wenn sowohl I als auch $\mathrm{Im}(f)$ beschränkt sind, dann ist f stetig auf I.
- □ Wenn I beschränkt ist, $\mathrm{Im}(f)$ abgeschlossen und f stetig auf I ist, dann ist I abgeschlossen.
- ■ Wenn I abgeschlossen und beschränkt ist, sowie $\mathrm{Im}(f)$ offen ist, dann ist f nicht stetig auf I.
- □ Wenn I abgeschlossen und beschränkt ist, sowie $\mathrm{Im}(f)$ abgeschlossen ist, dann ist f stetig auf I.

Frage [`SCQ-cont-vs-derivab-C`] : Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{|x|} & \text{falls } x \neq 0\,,\\ 1 & \text{falls } x = 0\,. \end{cases}$$

Dann gilt :

- ■ f ist rechtsseitig differenzierbar in $x=0$
- □ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert aber f ist nicht stetig in $x=0$
- □ f ist differenzierbar in $x=0$
- □ f ist stetig auf $\mathbb{R}$, aber nicht differenzierbar in $x=0$

Frage [SCQ-contin-deriv-C1-B] : Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{falls } x \neq 0\,, \\ 1 & \text{falls } x = 0\,. \end{cases}$$

Dann gilt :

- ■ $f'(0) = \frac{1}{2}$
- □ f ist nicht differenzierbar in $x = 0$
- □ $f'(0) = 1$
- □ $f'(0) = e$

Frage [SCQ-theo-accr-finis-A] : Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch $f(x) = 2^x + x^2$. Dann gilt :

- ■ Es existiert $c \in]2,3[$ so dass $f'(c) = 9$
- □ Es existiert $c \in]3,4[$ so dass $f'(c) = 9$
- □ Es existiert $c \in]0,1[$ so dass $f'(c) = 9$
- □ Es existiert $c \in]1,2[$ so dass $f'(c) = 9$

Frage [SCQ-dev-limite-A] : Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch $f(x) = e^{1+x-\cos(x)}$. Die Entwicklung von f vom Grad 3 im Punkt $x_0 = 0$ ist gegeben durch

- ■ $f(x) = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$
- □ $f(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$
- □ $f(x) = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$
- □ $f(x) = 1 - x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$

Frage [SCQ-serie-entiere-B] : Das Konvergenzintervall der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n+1}(x-1)^n$$

ist gegeben durch

- ■ $[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}[$
- □ $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$
- □ $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$
- □ $]\frac{3}{4}, \frac{5}{4}[$

Frage [SCQ-integrale-first-B] : Der Wert des uneigentlichen Integrals $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$ ist

- ■ $\dfrac{\pi}{2}$
- □ 1
- □ $2\ \mathrm{actan}(e)$
- □ $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)$

Frage [SCQ-integrale-second-A] : Der Wert des Integrals $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \cos(2x)\,\mathrm{d}x$ ist

- ■ $\frac{1}{5}(e^\pi - 1)$
- □ 0
- □ $\frac{2}{5}(e^\pi - 1)$
- □ $e^\pi - 1$

Frage [SCQ-int-generalisee-B] : Der Wert des Integrals $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$ ist

- ■ $\log\left(\dfrac{3}{2}\right)$
- □ $\log(6)$
- □ $\log\left(\dfrac{4}{3}\right)$
- □ $\log\left(\dfrac{3}{8}\right)$

Zweiter Teil, Wahr/Falsch-Fragen

Markieren Sie bitte für jede der folgenden Fragen die Box WAHR, wenn die Aussage **immer korrekt** ist, oder die Box FALSCH, wenn sie **nicht immer korrekt** ist, d.h. wenn die Aussage manchmal falsch ist.

Frage [`TF-inf-sup-A`] **:** Seien A und B zwei beschränkte, nicht-leere Teilmengen von $\mathbb{R}$. Wenn $\operatorname{Inf} A > \operatorname{Sup} B$, dann ist $A \cap B$ die leere Menge.

■ WAHR □ FALSCH

Frage [`TF-complexes-B`] **:** Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2) = 0$. Dann gilt $\operatorname{Re}(z_1) \cdot \operatorname{Re}(z_2) = 0$.

□ WAHR ■ FALSCH

Frage [`TF-induction-suites-limites-B`] **:** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ und sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge mit $a_0 = 1$ und $a_n = f(a_{n-1})$ für $n \geq 1$. Dann gilt $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$.

□ WAHR ■ FALSCH

Frage [`TF-serie-B`] **:** Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge strikt negativer Zahlen. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn sie absolut konvergiert.

■ WAHR □ FALSCH

Frage [`TF-fonction-etc-B`] **:** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng monotone Funktion. Dann ist f surjektiv.

□ WAHR ■ FALSCH

Frage [`TF-limite-continuite-A`] **:** Sei $f \colon]0,1[\to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wenn $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0$, dann ist f beschränkt.

■ WAHR □ FALSCH

Frage [`TF-limites-continuite-B`] **:** Sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass die Folge $\left(f(\frac{1}{n})\right)_{n \geq 1}$ den Grenzwert $f(0)$ hat. Dann ist f in $x_0 = 0$ stetig.

□ WAHR ■ FALSCH

Frage [`TF-serie-entiere-A`] **:** Wenn die Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \, (x-5)^k$ in $x = 2$ konvergiert, dann konvergiert sie auch in $x = 6$.

■ WAHR □ FALSCH

Frage [`TF-dev-limite-B`] **:** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Entwicklung vom Grad 2 im Punkt $x_0 = 0$ gegeben durch $f(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2)$. Wenn f im Punkt $x_0 = 0$ differenzierbar ist, dann gilt $f'(0) = b$.

■ WAHR □ FALSCH

Frage [`TF-integrale-A`] **:** Die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(t) = \int_0^t |x| \, \mathrm{d}x$ ist differenzierbar in $t = 0$.

■ WAHR □ FALSCH

Dritter Teil, offene Fragen

Beantworten Sie die Fragen im eingerahmten Bereich. In diesem Teil der Prüfung müssen die Lösungen begründet werden: Der Rechenweg muss erkennbar und jeder Schritt begründet sein. Die grau markierten Kästchen bitte frei lassen, sie werden für die Korrektur benötigt.

Frage 29: *Für diese Frage gibt es 8 Punkte.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ■ 8 *Hier nicht schreiben.*

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in C([a, b])$ eine Funktion die für alle $x \in]a, b[$ differenzierbar ist. Formulieren Sie den Mittelwertsatz aus der Vorlesung für die Funktion f.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 1$ gilt:

$$\frac{1}{x+1} \leq \log\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}.$$

Hinweis: $\log(\frac{x+1}{x}) = \log(x+1) - \log(x)$.

(c) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ die Folge gegeben durch

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1).$$

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton wachsend ist. Begründen Sie weiter, dass die Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ mit $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n)$ nach oben beschränkt ist. *Hinweis: Zeigen Sie, dass $(b_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend ist.*

(d) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ nach oben beschränkt ist und begründen Sie, warum der Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ existiert. *Hinweis: Schreiben Sie $a_n = a_n - b_n + b_n$ und überprüfen Sie, ob die Folge $(c_n)_{n\geq 1}$ mit $c_n := a_n - b_n$ beschränkt ist.*

Frage 30: *Für diese Frage gibt es 8 Punkte.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ■ 8 *Hier nicht schreiben.*

Sei die Funktion $f:\ ]0,\infty[\to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \log(\frac{1}{2} + x)$.

(a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ gilt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{(n+1)} 2^n \frac{(n-1)!}{(1+2x)^n}.$$

(b) Geben Sie die Taylorreihe von f im Punkt $x_0 = 1$ an.

(c) Bestimmen Sie das Konvergenzintervall der Taylorreihe und begründen Sie Ihr Vorgehen.

Katalog

Katalog

Katalog