EPFL

Prof. D. Kressner
Analyse I - (n/a)
11 Januar 2021
3 Stunden

n/a

n/a

SCIPER : **999999**

Drehen Sie diese Seite nicht um, bevor Sie dazu aufgefordert werden. Jedes Blatt hat eine Vorder- und eine Rückseite. Es gibt 8 Seiten (die letzten sind möglicherweise leer), mit 34 Fragen. Lösen Sie nicht die Heftklammern.

- Legen Sie Ihren Studentenausweis auf den Tisch.
- Es sind **keine** weiteren Unterlagen zugelassen.
- Die Nutzung eines **Taschenrechners** oder jedes anderen elektronischen Hilfsmittels ist während der Prüfung nicht gestattet.
- Für die **Multiple Choice** Fragen erhält man:
  $+3$ Punkte, wenn die Antwort richtig ist,
  0 Punkte, wenn die Frage nicht beantwortet ist oder mehrere Möglichkeiten markiert sind,
  -1 Punkt, wenn die Antwort falsch ist.
- Für die **Wahr/Falsch** Fragen erhält man:
  $+1$ Punkt, wenn die Antwort richtig ist,
  0 Punkte, wenn die Frage nicht beantwortet ist oder mehrere Möglichkeiten markiert sind,
  -1 Punkt, wenn die Antwort falsch ist.
- Benutzen Sie einen **Kugelschreiber mit schwarzer oder blauer Tinte** und verwenden Sie Korrekturflüssigkeit (z.B. Tipp-Ex) um bei Bedarf Ihre Antwort zu ändern.
- Falls eine Fragestellung einen Fehler enthält, darf der/die Unterrichtende die entsprechende Frage annulieren.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Erster Teil, 23 Multiple-Choice Fragen

Markieren Sie bitte für jede Frage das Kästchen, das zur richtigen Antwort gehört. Es gibt **genau eine** richtige Antwort pro Frage.

Frage 1 : Für *jede* zwei Mal auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in $x_0 = 0$ ein lokales Minimum hat, gilt:

A ☐ $f'(0) = 0$ und $f''(0) \neq 0$

C ☐ $f'(0) \neq 0$ und $f''(0) \neq 0$

B ☒ $f'(0) = 0$ und $f''(0) \geq 0$

D ☐ $f'(0) = 0$ und $f''(0) \leq 0$

Frage 2 : Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \leq 0\,, \\ \sqrt{1-x^2} & \text{wenn } 0 < x \leq 1\,, \\ 0 & \text{wenn } x > 1\,. \end{cases}$$

Dann gilt:

A ☒ f ist differenzierbar in $x = 0$ und stetig in $x = 1$

B ☐ f ist linkgsseitig differenzierbar in $x = 0$ und differenzierbar in $x = 1$

C ☐ f ist stetig in $x = 0$ und differenzierbar in $x = 1$

D ☐ f ist rechtsseitig differenzierbar in $x = 0$ und linksseitig differenzierbar in $x = 1$

Frage 3 : Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$. Seien $f_1 = f$ und $f_n = f \circ f_{n-1}$ für $n \geq 2$. Dann gilt für jedes $n \geq 1$:

☐ $f_n(x) = nx^3$ ☐ $f_n(x) = x^{(3n)}$ ☐ $f_n(x) = (3x)^n$ ☐ $f_n(x) = x^{(3^n)}$

Frage 4 : Gegeben seien $c \in \mathbb{R}$ und die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \quad \text{für } n \text{ gerade,} \qquad a_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)^c \quad \text{für } n \text{ ungerade.}$$

Dann gilt:

A ☐ $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m} = +\infty$

B ☒ die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert für genau einen Wert von c

C ☐ $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m+1} = c$

D ☐ die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ divergiert für alle Werte von c

Frage 5 : Gegeben sei die Funktion $f: \,]-\pi, \pi[\, \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{\operatorname{Arctg}(x^2)}{x\sin(x)}$. Dann gilt:

A ☐ f hat eine stetige Fortsetzung $\hat{f}$ im Punkt $x_0 = 0$ und es gilt $\hat{f}(0) = 0$.

B ☒ f hat eine stetige Fortsetzung $\hat{f}$ im Punkt $x_0 = 0$ und es gilt $\hat{f}(0) = 1$.

C ☐ f hat eine stetige Fortsetzung $\hat{f}$ im Punkt $x_0 = 0$ und es gilt $\hat{f}(0) = \frac{\pi}{2}$.

D ☐ f kann nicht im Punkt $x_0 = 0$ stetig fortgesetzt werden weil $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

Frage 6 : Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = x^2 \sin(x^2)$ und $I \subset \mathbb{R}$ das Bild von f:

$$I = \{y \in \mathbb{R} \, : \, \exists x \in \mathbb{R} \text{ so dass } f(x) = y\}\,.$$

Dann gilt:

A ☐ $I = [0, +\infty[$ b ☐ $I = [0, 1]$ C ☒ $I = \mathbb{R}$ D ☐ $I = [-1, 1]$

Frage 7 : Gegeben sei die Menge $A = \big\{x \in \mathbb{R} \colon 0 < \operatorname{Arctg}\big(\frac{1}{x}\big) < \frac{\pi}{4}\big\}$. Dann gilt:

☐ $A =]0, 1[$
☐ $A = \big]1, \frac{\pi}{2}\big[$
☐ A ist nicht beschränkt
☐ $\operatorname{Inf}(A) = \frac{\pi}{2}$

Frage 8 : Gegeben sei die von einem Parameter $b \in \mathbb{R}$ abhängige Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(b + \frac{1}{k}\right)^k .$$

Diese Reihe konvergiert für alle Werte von b welche die folgende Bedingung erfüllen:

☐ $b \leq 1$ ☐ $b \in \,]-1, 1[$ ☐ $b < 1$ ☐ $b \in \,]-1, 1]$

Frage 9 : Seien a und b zwei reelle Zahlen so dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{wenn } x \leq 0\,, \\ \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x} & \text{wenn } x > 0\,, \end{cases}$$

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$

$g(x)$ $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x + o(x^2)$

in $x_0 = 0$ differenzierbar ist. Dann gilt:

A ☐ $f(-3) = \frac{3}{8}$ B ☐ $f(-3) = -\frac{3}{8}$ C ☒ $f(-3) = \frac{7}{8}$ D ☐ $f(-3) = \frac{1}{4}$

Frage 10 : Gegeben seien die Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}\, \sin\big(\frac{1}{x}\big) & \text{wenn } x \neq 0, \\ 1 & \text{wenn } x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \operatorname{Arctg}(x) & \text{wenn } x \neq 0, \\ 1 & \text{wenn } x = 0. \end{cases}$$

Welche der beiden Funktionen sind stetig in $x_0 = 0$?

A ☐ f und g B ☐ weder f noch g C ☒ g, aber nicht f D ☐ f, aber nicht g

<

Frage 11 : Der Wert des Integrals $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(x)\, dx$ ist

A ☐ $\frac{3\pi}{2}$ B ☐ $-\pi$ C ☒ 2π D ☐ 0

Frage 12 : Gegeben seien die folgenden beiden Teilmengen von $\mathbb{C}$:

$$A = \big\{z \in \mathbb{C} \colon z^2\,(|z| - 2) = 0\big\}\,, \qquad B = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}(z) = 1\}\,.$$

Dann gilt:

☐ $A \cap B$ besteht aus genau zwei Punkten
☐ $A \cap B$ besteht aus genau einem Punkt
☐ $A \cap B$ enthält alle Punkte einer Gerade in der komplexen Ebene
☐ $A \cap B$ ist die leere Menge

$\exp(\log(1+x^2)\cdot(1+x^2))$

Frage 13 : Die Ableitung der Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=(1+x^2)^{1+x^2}$ im Punkt $x_0=1$ ist

A ☒ $8\,(\mathrm{Log}(2)+1)$ B ☐ 8 C ☐ 4 D ☐ $4\,(\mathrm{Log}(2)+1)$

Frage 14 : Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ mit $a_n=\dfrac{(n+3)^{1/2}-n^{1/2}}{(n+1)^{-1/2}}$. Dann gilt:

☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{3}{2}$ ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$ ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=3$

Frage 15 : Gegeben sei die komplexe Zahl $z=1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$. Dann gilt:

☐ $z^{14}\in\mathbb{R}$ ☐ $\mathrm{Re}(z^8)>0$ ☐ $|z^6|>73$ ☐ $\mathrm{Im}(z^{11})<0$

Frage 16 : Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n=(-1)^n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Dann gilt:

A ☐ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$ konvergiert, aber $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ divergiert

B ☐ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergiert, aber $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergiert nicht absolut

C ☐ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, aber $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ divergiert

D ☒ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergiert absolut

Frage 17 : Sei $f\colon [0,4]\to\mathbb{R}$ auf $[0,4]$ stetig und auf $]0,4[$ differenzierbar. Ausserdem gelte $f'(x)\geq 2$ für jedes $x\in\,]0,4[$. Für jede Funktion f mit diesen Eigenschaften gilt:

A ☐ $0\leq f(3)-f(2)\leq 1$ C ☐ $f(4)-f(1)\leq 4$

B ☐ $f(4)-f(0)\leq 1$ D ☒ $f(2)-f(0)\geq 4$

$f(2)-f(0)=f'(x)\cdot(2-0)$

Frage 18 : Gegeben sei die Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\sin(\sin(x))$. Dann ist die Taylor-Entwicklung vom Grad 5 der Funktion f um den Punkt $x_0=0$ gegeben durch:

A ☒ $f(x)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{10}x^5+o(x^5)$

B ☐ $f(x)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)$

C ☐ $f(x)=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)$

D ☐ $f(x)=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{10}x^5+o(x^5)$

$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$

$\sin(y)=y-\frac{y^3}{6}+\frac{y^5}{120}+o(y^5)$

$\sin\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{6}\dots\right)^3\dots$

$=x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^3}{6}$

Frage 19 : Gegeben sei die Funktion $f\colon\,]-1,1[\,\to\mathbb{R}$ mit $f(t)=\dfrac{1}{4+3t}$. Dann ist die Taylor-Entwicklung vom Grad 2 der Funktion f um den Punk $t_0=0$ gegeben durch:

A ☐ $f(t)=\frac{1}{4}-\frac{3}{16}t+\frac{9}{32}t^2+o(t^2)$ C ☐ $f(t)=\frac{1}{4}+\frac{3}{16}t-\frac{9}{64}t^2+o(t^2)$

B ☒ $f(t)=\frac{1}{4}-\frac{3}{16}t+\frac{9}{64}t^2+o(t^2)$ D ☒ $f(t)=\frac{1}{4}-\frac{3}{16}t+\frac{9}{128}t^2+o(t^2)$

$\dfrac{1}{4+3t}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{1+\frac{3}{4}t}\right)$ $\dfrac{1}{1-u}=1+u+u^2+u^3+O(u^3)$ für $u\to 0$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$\sin(y) = y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} + o(y^5)$$

$$\sin\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} \dots\right)^3$$

$$-\frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\left(x - \frac{x^5}{6} + \frac{x^5}{120}\right)$$

$$-\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}\left(-\frac{x^5}{6} - \frac{x^5}{6} - \frac{x^5}{6}\right)$$

Frage 20 : Das verallgemeinerte Integral $\int_1^{2^-} \frac{x+1}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x$

A ☐ konvergiert und nimmt den Wert $\frac{8}{3}$ an
B ☒ konvergiert und nimmt den Wert $\frac{16}{3}$ an
C ☐ konvergiert und nimmt den Wert 4 an
D ☐ divergiert

Frage 21 : Die Konvergenzmenge der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}\,(x+1)^n$ ist das Intervall

A ☒ $I =]-2, 0[$
B ☐ $I = [-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}]$
C ☐ $I =]-1, 1[$
D ☐ $I = \mathbb{R}$

Frage 22 : Der Wert des Integrals $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ ist

A ☐ $3(2\sqrt{2}-1)$
B ☐ $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$
C ☒ $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$
D ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Frage 23 : Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \frac{(5n+1)^n}{n^n 5^n}$. Dann gilt:

☐ $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$
☐ $\lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{5}}$
☐ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
☐ $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Teil 2, 11 Wahr oder Falsch Fragen

Markieren Sie für jede Frage entweder das Kästchen WAHR, wenn die Aussage **immer wahr** ist, oder das Kästchen FALSCH, wenn die Aussage **nicht immer wahr ist** (das heisst die Aussage ist manchmal falsch).

Frage 24 : Sei $f\colon\ ]0,1[\ \to \mathbb{R}$ eine monotone und auf $]0,1[$ differenzierbare Funktion. Desweiteren sei f nicht konstant. Dann gilt entweder $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in\ ]0,1[$ oder $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in\ ]0,1[$.

☒ WAHR ☐ FALSCH

Frage 25 : Gegeben sei $y \in \mathbb{R}$ mit $y \neq 0$. Dann hat die Gleichung $z^4 = \mathrm{i}\,y$ genau vier verschiedene Lösungen $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 26 : Sei $(a_k)_{k\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_k \neq 0$ für alle $k \geq 0$. Ausserdem gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 0$. Dann konvergiert die Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

☒ WAHR ☐ FALSCH

Frage 27 : Sei $A \subset \mathbb{R}$. Wenn $\mathrm{Inf}(A) \in A$ und $\mathrm{Sup}(A) \in A$ gelten, dann ist A ein abgeschlossenes Intervall.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 28 : Seien g und h zwei auf $]-1,1[$ differenzierbare Funktionen, so dass $g(0) = h(0) = 0$ sowie $h'(x) \neq 0$ für alle $x \in\ ]-1,1[$ gelten. Dann gilt folgendes: Wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g'(x)}{h'(x)}$ nicht existiert dann existiert auch der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)}{h(x)}$ nicht.

☐ WAHR ☒ FALSCH

Frage 29 : Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(n) > n$ für alle $n \geq 1$. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 30 : Sei $(x_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen so dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Dann enthält $(x_n)_{n\geq 0}$ keine beschränkte Teilfolge.

☒ WAHR ☐ FALSCH

Frage 31 : Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt so dass $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, dann ist f nicht stetig auf $\mathbb{R}$.

☒ WAHR ☐ FALSCH

Frage 32 : Gegeben sei eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Taylor-Entwicklung $f(x) = \left(a + bx + cx^2\right)^3 + o(x^2)$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann ist die Taylor-Entwicklung vom Grad 2 der Funktion $g(x) = f(x)^3$ um 0 gegeben durch $g(x) = a^3 + b^3x + c^3x^2 + o(x^2)$.

$(f(x))^3$

☐ WAHR ☒ FALSCH

Frage 33 : Seien $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ zwei konvergente Folgen mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq 0$. Dann existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 34 : Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen so dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Weiterhin seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine auf $\mathbb{R}$ stetige Funktion und

$$b_n = \int_0^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad n \geq 1\,.$$

$\rightarrow = F(a_n) - F(0)$

Dann konvergiert die Folge $(b_n)_{n\geq 1}$.

☒ WAHR ☐ FALSCH