



EPFL

Prof. D. Kressner
Analyse I - XXX
13 Januar 2020
3 Stunden

34

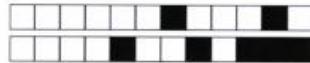
XXX-1

SCIPER: FAKE-1

Drehen Sie diese Seite nicht um, bevor Sie dazu aufgefordert werden. Jedes Blatt hat eine Vorder- und eine Rückseite. Es gibt 12 Seiten (die letzten sind möglicherweise leer), mit 31 Fragen. Lösen Sie nicht die Heftklammern.

- Legen Sie Ihren Studentenausweis auf den Tisch.
 - Es sind **keine** weiteren Unterlagen zugelassen.
 - Die Nutzung eines **Taschenrechners** oder jedes anderen elektronischen Hilfsmittels ist während der Prüfung nicht gestattet.
 - Für die **Multiple Choice** Fragen erhält man:
 - +3 Punkte, wenn die Antwort richtig ist,
 - 0 Punkte, wenn die Frage nicht beantwortet ist oder mehrere Möglichkeiten markiert sind,
 - 1 Punkt, wenn die Antwort falsch ist.
 - Für die **Wahr/Falsch** Fragen erhält man:
 - +1 Punkt, wenn die Antwort richtig ist,
 - 0 Punkte, wenn die Frage nicht beantwortet ist oder mehrere Möglichkeiten markiert sind,
 - 1 Punkt, wenn die Antwort falsch ist.
 - Benutzen Sie einen **Kugelschreiber mit schwarzer oder blauer Tinte** und verwenden Sie Korrekturflüssigkeit (z.B. Tipp-Ex) um bei Bedarf Ihre Antwort zu ändern.
 - Falls eine Fragestellung einen Fehler enthält, darf der/die Unterrichtende die entsprechende Frage annullieren.

Respectez les consignes suivantes Observe this guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> + <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>		



Erster Teil, Multiple-Choice-Fragen

Markieren Sie bitte für jede Frage die Box an, die zu der richtigen Lösung gehört. Es gibt **genau eine** richtige Antwort pro Frage.

Frage 1 : Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{3^n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann

- 0/3 konvergiert die Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ gegen $x_0 - \frac{3}{2}$ für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$.
 konvergiert die Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ gegen 0 für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$.
 konvergiert die Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ gegen x_0 für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$.
 divergiert die Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$.

Frage 2 : Für $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$ betrachte man die Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ mit $x_{n+1} = f(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}$ und einem fest gewählten $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

- 0/3 Für $x_0 = 1/\sqrt{2}$ konvergiert die Folge gegen $-\sqrt{2}$.
 Für $x_0 = 1$ konvergiert die Folge gegen $-\sqrt{2}$.
 Es gibt kein x_0 für welche die Folge gegen $-\sqrt{2}$ konvergiert.
 Für $x_0 = -2$ konvergiert die Folge gegen $-\sqrt{2}$.

Frage 3 : Der Imaginärteil von $(-1 + \sqrt{3}i)^5$ ist

- 0/3 $32\sqrt{3}$ $16\sqrt{3}$ $-16\sqrt{3}$ $32\sqrt{3}i$

Frage 4 : Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ gegeben. Das Taylor-Polynom der Ordnung 3 von f um $x_0 = 0$ ist

- 0/3 $\frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x^3}{48}$ $\frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{24}$
 $\frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48}$ $\frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{48}$

Frage 5 :

Man betrachte die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right)$ für $n \in \mathbb{N}^*$. Dann gilt:

- 0/3 $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\sqrt{2}$ $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\sqrt{2}$
 $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -2$

Frage 6 : Sei $a_n = (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ für $n \in \mathbb{N}^*$. Dann

- 0/3 divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.
 konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sie konvergiert aber nicht absolut.
 divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
 konvergieren die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.



Frage 7 : Das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{x^{3/2} + 3}{x^3} dx$

0/3

- konvergiert und ist $8/3$
 divergiert

- konvergiert und ist $7/2$
 konvergiert und ist $-7/2$

Frage 8 : Sei $I = \int_1^2 x \log(1+x) dx$. Dann gilt:

0/3

- $I = \frac{1}{2} \log(2) + \frac{1}{4}$
 $I = \frac{3}{2} \log(3) - \frac{1}{4}$
- $I = 2 \log(3) + \frac{1}{2} \log(2)$
 $I = 2 \log(3) - \frac{1}{2} \log(2)$

Frage 9 : Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} (ax+1)(bx-1) & \text{für } x \geq 0 \\ \sin(a^2 x) - b & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

differenzierbar an der Stelle 0?

0/3

- $a = \pm 1$ und $b = 1$
 $a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ und $b = 1$
- $a = \pm 1$ und $b = -1$
 $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ und $b = -1$

Frage 10 : Sei $I := \int_0^2 e^{x^2} dx$. Dann gilt:

0/3

- $2 \leq I \leq 200$
 $I \geq 200$
 $0 \leq I < \frac{14}{3}$
 $I = \exp\left(\frac{8}{3}\right) - 1$

Frage 11 : Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^{\frac{2}{\alpha}} (n^{2\alpha} + 1)}}$ konvergiert wenn

0/3

- $1 < \alpha < 2$
 $0 < \alpha < \frac{1}{2}$
 $\alpha = \frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

Frage 12 : Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) = |x \cos(x)|$ gegeben. Dann gilt:

0/3

- Es existiert ein $u \in \left]-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right[$ so dass $f'(u) = 0$.
 Es existiert ein $u \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ so dass $f'(u) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 f ist monoton wachsend auf $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
 f hat genau ein lokales Minimum in \mathbb{R} .

Frage 13 : Gegeben seien drei Funktionen $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \sin(1/x) & \text{für } x > 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x \leq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sh}(1/x) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

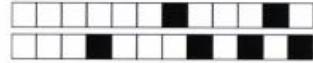
und

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x > 0 \\ x \log(|x|) & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Welche dieser drei Funktionen sind stetig in $x = 0$?

0/3

- f und g
 f, g und h
 g und h
 f und h



Frage 14 : Sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

gegeben. Dann gilt:

- 0/3
- f ist stetig auf \mathbb{R} , sowie rechtsseitig aber nicht linksseitig differenzierbar in 0.
 - f ist stetig auf \mathbb{R} , sowie linksseitig aber nicht rechtsseitig differenzierbar in 0.
 - f ist differenzierbar aber nicht stetig auf \mathbb{R} .
 - $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Frage 15 : Sei $A = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} : \frac{1}{\log(x)} < 1 \right\}$. Dann gilt:

- 0/3
- $\text{Sup } A = e$
 - $\text{Inf } A = e$
 - A ist nicht nach unten beschränkt
 - $\text{Inf } A = 0$

Frage 16 : Der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{5n+\sqrt{3n-\sqrt{2n}}}}$

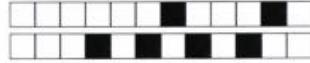
- 0/3
- existiert und ist $\frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{3-\sqrt{2}}}}$.
 - existiert und ist $\frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{3-\sqrt{2}}}}$.
 - existiert nicht.
 - existiert und ist $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Frage 17 : Sei $f: [1, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) = \sin(\text{Arctg}(\sqrt{x}))$ gegeben. Das Bild von f ist

- 0/3
- $[-1, 1]$
 - $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$
 - $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right[$
 - $]0, 1]$

Frage 18 : Sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{(n^b)} x^n$.

- 0/3
- Für $b = 1$ gilt $R = e^{-1}$.
 - Für $b = 3$ gilt $R = e$.
 - Für $b = 2$ gilt $R = 1$.
 - Für $b = 4$ gilt $R = e^2$.



Zweiter Teil, Wahr/Falsch-Fragen

Markieren Sie bitte für jede der folgenden Fragen die Box WAHR an, wenn die Aussage **immer korrekt** ist, oder die Box FALSCH, wenn sie **nicht immer korrekt** ist, d.h. wenn die Aussage manchmal falsch ist.

Frage 19 : Sei die Funktion $f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ bijektiv und stetig. Dann gilt $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$.

0/1

 WAHR FALSCH

Frage 20 : Für jede komplexe Zahl $\omega \in \mathbb{C}$ mit $\omega \neq 0$ gibt es unendlich viele komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ so dass $\operatorname{Im}(\omega z) = 0$.

0/1

 WAHR FALSCH

Frage 21 : Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monotone Funktion und für $x_0 \in \mathbb{R}$ gelte

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Dann ist f linksseitig differenzierbar in x_0 .

0/1

 WAHR FALSCH

Frage 22 : Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Dann gilt: Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, so konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$.

0/1

 WAHR FALSCH

Frage 23 : Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} (3x)^k$ ist 3.

0/1

 WAHR FALSCH

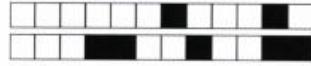
Frage 24 : Sei

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dann ist f in genau zwei Punkten stetig.

0/1

 WAHR FALSCH



Frage 25 : Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ist f differenzierbar an der Stelle x_0 so ist die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = \sin(f(x))$ ebenfalls differenzierbar an der Stelle x_0 .

0/1

 WAHR FALSCH

Frage 26 : Gegeben sei eine Funktion $f \in C^\infty([-1, 1])$ mit der Taylor-Entwicklung $f(x) = 1 + 2x + x^2 + o(x^3)$ um $x_0 = 0$. Dann hat die Funktion $(f(x))^2$ die Taylor-Entwicklung $(f(x))^2 = 1 + 4x^2 + o(x^3)$ um $x_0 = 0$.

0/1

 WAHR FALSCH

Frage 27 : Eine streng monotone Funktion $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ist stets bijektiv.

0/1

 WAHR FALSCH

Frage 28 : Für eine gegebene monoton wachsende und beschränkte Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei $a_n = f(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Cauchy-Folge.

0/1

 WAHR FALSCH



Dritter Teil, Offene Fragen

Beantworten Sie die Fragen im eingerahmten Bereich. In diesem Teil der Prüfung müssen die Lösungen begründet werden: Der Rechenweg muss erkennbar und jeder Schritt begründet sein. Die grau markierten Kästchen bitte frei lassen, sie werden für die Korrektur benötigt.

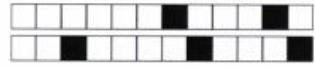
Frage 29: Diese Frage zählt 4 Punkte.

0/4

₀ ₁ ₂ ₃ ₄

Hier nicht schreiben.

- (a) Geben Sie ein Beispiel für eine Folge, die streng monoton wachsend und beschränkt ist.
- (b) Geben Sie ein Beispiel für eine streng monoton wachsende Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.
- (c) Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f : [-1, 0[\rightarrow \mathbb{R}$, die stetig aber nicht gleichmässig stetig auf $[-1, 0[$ ist.
- (d) Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) \neq 0$ so dass f eine Stammfunktion von f ist.



+34/8/17+



Frage 30: Diese Frage zählt 7 Punkte.

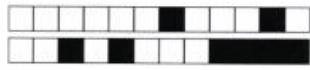
0/7

<input type="checkbox"/>							
0	1	2	3	4	5	6	7

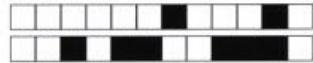
Hier nicht schreiben.

Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$.

- Zeigen Sie: Gilt $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$, so gibt es $\xi \in]1, 3[$ mit $f''(\xi) = 0$.
- Zeigen Sie: Ist f konvex und $f(1) = f(2)$ dann hat f ein (globales) Minimum im Intervall $]1, 2[$.



+34/10/15+



Frage 31: Diese Frage zählt 5 Punkte.

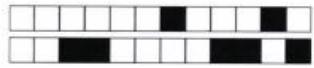
0/5

0 1 2 3 4 5

Hier nicht schreiben.

Seien $f \in C^1([a, b])$ und $x_0 \in]a, b[$. Zeigen Sie:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0 + 2h)}{h} = -4f'(x_0).$$



+34/12/13+

