XXX-1
Score: 0/80

+34/1/24+

EPFL

Prof. D. Kressner
Analyse I - XXX
13 Januar 2020
3 Stunden

34

XXX-1

SCIPER: **FAKE-1**

Drehen Sie diese Seite nicht um, bevor Sie dazu aufgefordert werden. Jedes Blatt hat eine Vorder- und eine Rückseite. Es gibt 12 Seiten (die letzten sind möglicherweise leer), mit 31 Fragen. Lösen Sie nicht die Heftklammern.

- Legen Sie Ihren Studentenausweis auf den Tisch.
- Es sind **keine** weiteren Unterlagen zugelassen.
- Die Nutzung eines **Taschenrechners** oder jedes anderen elektronischen Hilfsmittels ist während der Prüfung nicht gestattet.
- Für die **Multiple Choice** Fragen erhält man:
  +3 Punkte, wenn die Antwort richtig ist,
  0 Punkte, wenn die Frage nicht beantwortet ist oder mehrere Möglichkeiten markiert sind,
  −1 Punkt, wenn die Antwort falsch ist.
- Für die **Wahr/Falsch** Fragen erhält man:
  +1 Punkt, wenn die Antwort richtig ist,
  0 Punkte, wenn die Frage nicht beantwortet ist oder mehrere Möglichkeiten markiert sind,
  −1 Punkt, wenn die Antwort falsch ist.
- Benutzen Sie einen **Kugelschreiber mit schwarzer oder blauer Tinte** und verwenden Sie Korrekturflüssigkeit (z.B. Tipp-Ex) um bei Bedarf Ihre Antwort zu ändern.
- Falls eine Fragestellung einen Fehler enthält, darf der/die Unterrichtende die entsprechende Frage annulieren.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren
☒ ☑ ■	☐	☐

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Erster Teil, Multiple-Choice-Fragen

Markieren Sie bitte für jede Frage die Box an, die zu der richtigen Lösung gehört. Es gibt **genau eine** richtige Antwort pro Frage.

Frage 1 : Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{3^n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann

0/3

- ☐ konvergiert die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ gegen $x_0 - \frac{3}{2}$ für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$.
- ☐ konvergiert die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ gegen 0 für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$.
- ☐ konvergiert die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ gegen x_0 für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$.
- ☐ divergiert die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$.

Frage 2 : Für $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ betrachte man die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ mit $x_{n+1} = f(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}$ und einem fest gewählten $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

0/3

- ☐ Für $x_0 = 1/\sqrt{2}$ konvergiert die Folge gegen $-\sqrt{2}$.
- ☐ Für $x_0 = 1$ konvergiert die Folge gegen $-\sqrt{2}$.
- ☐ Es gibt kein x_0 für welche die Folge gegen $-\sqrt{2}$ konvergiert.
- ☐ Für $x_0 = -2$ konvergiert die Folge gegen $-\sqrt{2}$.

Frage 3 : Der Imaginärteil von $(-1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i})^5$ ist

0/3

☐ $32\sqrt{3}$ ☐ $16\sqrt{3}$ ☐ $-16\sqrt{3}$ ☐ $32\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

Frage 4 : Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ gegeben. Das Taylor-Polynom der Ordnung 3 von f um $x_0 = 0$ ist

0/3

- ☐ $\frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x^3}{48}$
- ☐ $\frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{24}$
- ☐ $\frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48}$
- ☐ $\frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{48}$

Frage 5 :
Man betrachte die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right)$ für $n \in \mathbb{N}^*$. Dann gilt:

0/3

- ☐ $\limsup_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\sqrt{2}$
- ☐ $\limsup_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\sqrt{2}$
- ☐ $\limsup_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$
- ☐ $\limsup_{n\to\infty} a_n = 2$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = -2$

Frage 6 : Sei $a_n = \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ für $n \in \mathbb{N}^*$. Dann

0/3

- ☐ divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.
- ☐ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sie konvergiert aber nicht absolut.
- ☐ divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- ☐ konvergieren die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

0/3

Frage 7 : Das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{x^{3/2}+3}{x^3}\,dx$

- ☐ konvergiert und ist 8/3
- ☐ konvergiert und ist 7/2
- ☐ divergiert
- ☐ konvergiert und ist −7/2

0/3

Frage 8 : Sei $I = \int_1^2 x \operatorname{Log}(1+x)\,dx$. Dann gilt:

- ☐ $I = \frac{1}{2}\operatorname{Log}(2) + \frac{1}{4}$
- ☐ $I = 2\operatorname{Log}(3) + \frac{1}{2}\operatorname{Log}(2)$
- ☐ $I = \frac{3}{2}\operatorname{Log}(3) - \frac{1}{4}$
- ☐ $I = 2\operatorname{Log}(3) - \frac{1}{2}\operatorname{Log}(2)$

Frage 9 : Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} (ax+1)(bx-1) & \text{für } x \geq 0 \\ \sin(a^2x) - b & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

differenzierbar an der Stelle 0?

0/3

- ☐ $a = \pm 1$ und $b = 1$
- ☐ $a = \pm 1$ und $b = -1$
- ☐ $a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ und $b = 1$
- ☐ $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ und $b = -1$

Frage 10 : Sei $I := \int_0^2 e^{x^2}\,dx$. Dann gilt:

0/3

- ☐ $2 \leq I \leq 200$
- ☐ $I \geq 200$
- ☐ $0 \leq I < \frac{14}{3}$
- ☐ $I = \exp\left(\frac{8}{3}\right) - 1$

Frage 11 : Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^{\frac{2}{\alpha}}(n^{2\alpha}+1)}}$ konvergiert wenn

0/3

- ☐ $1 < \alpha < 2$
- ☐ $0 < \alpha < \frac{1}{2}$
- ☐ $\alpha = \frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

Frage 12 : Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = |x\cos(x)|$ gegeben. Dann gilt:

0/3

- ☐ Es existiert ein $u \in \left]-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right[$ so dass $f'(u) = 0$.
- ☐ Es existiert ein $u \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ so dass $f'(u) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- ☐ f ist monoton wachsend auf $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
- ☐ f hat genau ein lokales Minimum in $\mathbb{R}$.

Frage 13 : Gegeben seien drei Funktionen $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\sin(1/x) & \text{für } x > 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x \leq 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} x\operatorname{sh}(1/x) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

und

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x > 0 \\ x\operatorname{Log}(|x|) & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Welche dieser drei Funktionen sind stetig in $x = 0$?

0/3

- ☐ f und g
- ☐ f, g und h
- ☐ g und h
- ☐ f und h

Frage 14 : Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

gegeben. Dann gilt:

0/3

- ☐ f ist stetig auf $\mathbb{R}$, sowie rechtsseitig aber nicht linksseitig differenzierbar in 0.
- ☐ f ist stetig auf $\mathbb{R}$, sowie linksseitig aber nicht rechtsseitig differenzierbar in 0.
- ☐ f ist differenzierbar aber nicht stetig auf $\mathbb{R}$.
- ☐ $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Frage 15 : Sei $A = \left\{x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} : \dfrac{1}{\operatorname{Log}(x)} < 1\right\}$. Dann gilt:

0/3

- ☐ Sup $A = e$
- ☐ Inf $A = e$
- ☐ A ist nicht nach unten beschränkt
- ☐ Inf $A = 0$

Frage 16 : Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{5n+\sqrt{3n-\sqrt{2n}}}}$

0/3

- ☐ existiert und ist $\frac{1}{\sqrt{5}}$.
- ☐ existiert und ist $\frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{3-\sqrt{2}}}}$.
- ☐ existiert nicht.
- ☐ existiert und ist $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Frage 17 : Sei $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \sin(\operatorname{Arctg}(\sqrt{x}))$ gegeben. Das Bild von f ist

0/3

- ☐ $[-1, 1]$
- ☐ $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$
- ☐ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right[$
- ☐ $]0, 1]$

Frage 18 : Sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{(n^b)} x^n$.

0/3

- ☐ Für $b = 1$ gilt $R = e^{-1}$.
- ☐ Für $b = 3$ gilt $R = e$.
- ☐ Für $b = 2$ gilt $R = 1$.
- ☐ Für $b = 4$ gilt $R = e^2$.

Zweiter Teil, Wahr/Falsch-Fragen

Markieren Sie bitte für jede der folgenden Fragen die Box WAHR an, wenn die Aussage **immer korrekt** ist, oder die Box FALSCH, wenn sie **nicht immer korrekt** ist, d.h. wenn die Aussage manchmal falsch ist.

Frage 19 : Sei die Funktion $f\colon [-1,1] \to [-1,1]$ bijektiv und stetig. Dann gilt $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$.

0/1 ☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 20 : Für jede komplexe Zahl $\omega \in \mathbb{C}$ mit $\omega \neq 0$ gibt es unendlich viele komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ so dass $\mathrm{Im}(\omega z) = 0$.

0/1 ☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 21 : Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion und für $x_0 \in \mathbb{R}$ gelte

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0).$$

Dann ist f linksseitig differenzierbar in x_0.

0/1 ☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 22 : Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Dann gilt: Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, so konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$.

0/1 ☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 23 : Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} (3x)^k$ ist 3.

0/1 ☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 24 : Sei

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dann ist f in genau zwei Punkten stetig.

0/1 ☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 25 : Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ist f differenzierbar an der Stelle x_0 so ist die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \sin(f(x))$ ebenfalls differenzierbar an der Stelle x_0.

0/1 ☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 26 : Gegeben sei eine Funktion $f \in C^\infty(]-1,1[)$ mit der Taylor-Entwicklung $f(x) = 1+2x+x^2+o(x^3)$ um $x_0 = 0$. Dann hat die Funktion $(f(x))^2$ die Taylor-Entwicklung $(f(x))^2 = 1 + 4x^2 + o(x^3)$ um $x_0 = 0$.

0/1 ☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 27 : Eine streng monotone Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ ist stets bijektiv.

0/1 ☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 28 : Für eine gegebene monoton wachsende und beschränkte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $a_n = f(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Cauchy-Folge.

0/1 ☐ WAHR ☐ FALSCH

Dritter Teil, Offene Fragen

Beantworten Sie die Fragen im eingerahmten Bereich. In diesem Teil der Prüfung müssen die Lösungen begründet werden: Der Rechenweg muss erkennbar und jeder Schritt begründet sein. Die grau markierten Kästchen bitte frei lassen, sie werden für die Korrektur benötigt.

Frage 29: *Diese Frage zählt 4 Punkte.*

0/4 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 *Hier nicht schreiben.*

(a) Geben Sie ein Beispiel für eine Folge, die streng monoton wachsend und beschränkt ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine streng monton wachsende Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

(c) Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f : [-1,0[\to \mathbb{R}$, die stetig aber nicht gleichmässig stetig auf $[-1,0[$ ist.

(d) Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) \neq 0$ so dass f eine Stammfunktion von f ist.

0/7

Frage 30: *Diese Frage zählt 7 Punkte.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 *Hier nicht schreiben.*

Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie: Gilt $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, so gibt es $\xi \in]1, 3[$ mit $f''(\xi) = 0$.

(b) Zeigen Sie: Ist f konvex und $f(1) = f(2)$ dann hat f ein (globales) Minimum im Intervall $]1, 2[$.

+34/10/15+

Frage 31: *Diese Frage zählt 5 Punkte.*

0/5

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 *Hier nicht schreiben.*

Seien $f \in C^1(]a,b[)$ und $x_0 \in]a,b[$. Zeigen Sie:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0 + 2h)}{h} = -4f'(x_0).$$