



+41/1/60+

Leh.: K.-D. Semmler - Analysis I - XXX

15 Januar 2018 - Dauer: 3 Stunden




# 41

## XXX-1


SCIPER: **FAKE-1**

Drehen Sie diese Seite nicht um, bevor Sie dazu aufgefordert werden. Jedes Blatt hat eine Vorder- und eine Rückseite. Es gibt 12 Seiten, die letzten sind möglicherweise leer. Lösen Sie nicht die Heftklammern.

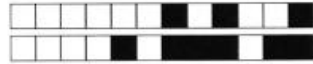
- Legen Sie Ihren Studentenausweis auf den Tisch.
- Es sind **keine** weiteren Unterlagen zugelassen.
- Die Nutzung eines **Taschenrechners** oder jedes anderen elektronischen Hilfsmittels ist während der Prüfung nicht gestattet.
- Für die **Multiple Choice** Fragen erhält man:
  - +3 Punkte, wenn die Antwort richtig ist,
  - 0 Punkte, wenn die Frage nicht beantwortet ist oder mehrere Möglichkeiten angekreuzt sind, und
  - 1 Punkt, wenn die Antwort falsch ist.
- Für die **Wahr/Falsch** Fragen erhält man:
  - +1 Punkt, wenn die Antwort richtig ist,
  - 0 Punkte, wenn die Frage nicht beantwortet ist oder mehrere Möglichkeiten angekreuzt sind, und
  - 1 Punkt, wenn die Antwort falsch ist.
- Benutzen Sie einen **Kugelschreiber mit schwarzer oder blauer Tinte** und verwenden Sie Korrekturflüssigkeit (z.B. Tipp-Ex) um bei Bedarf Ihre Antwort zu ändern.
- Falls eine Fragestellung einen Fehler enthält, darf der/die Unterrichtende die entsprechende Frage annullieren.
- Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien zum Markieren **der Antworten**:

 oui | ja | sì | yes



 non | nein | non | no





## Erster Teil, Multiple-Choice-Fragen

Kreuzen Sie bitte für jede Frage die Box an, die zu der richtigen Lösung gehört. Es gibt **genau** eine richtige Antwort pro Frage.

**Frage 1 :** Sei  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen und  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , die Folge der Partialsummen. Wenn nun  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 1$ , dann gilt:

- ☐  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n} < 1$
- ☐  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_{2n} - 2s_n) = 0$
- ☐  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$
- ☒  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_{2n} - s_n) = 0$

**Frage 2 :** Betrachte die Folge reeller Zahlen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definiert durch

$$a_n = \frac{\text{Log}(n + e^n)}{n + 1} .$$

Dann gilt:

- ☐  $a_n$  ist eine unbeschränkte Folge.
- ☐  $a_n$  ist eine beschränkte Folge und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- ☐  $a_n$  ist eine beschränkte Folge und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$
- ☒  $a_n$  ist eine beschränkte Folge und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

**Frage 3 :** Betrachte die Reihe  $S$  gegeben durch

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{cn}} .$$

mit einem Parameter  $c \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

- ☒  $S$  konvergiert genau dann wenn  $c \geq 1$
- ☐  $S$  konvergiert genau dann wenn  $c \geq 0$
- ☐  $S$  konvergiert genau dann wenn  $2 > c > 0$
- ☐  $S$  konvergiert genau dann wenn  $c > 3$



Frage 4 : Setze

$$I = \int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{1-4x+4x^2}} dx .$$

Dann gilt:

☐  $I = \frac{1}{2} \operatorname{Log} (6 - \sqrt{33})$

☒  $I = \frac{1}{2} \operatorname{Log} (5)$

☐  $I = -\frac{1}{2} \operatorname{Log} (5)$

☐  $I = -\frac{1}{2} \operatorname{Arcsin} \left( \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$

Frage 5 : Gegeben sei die Funktion  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) = \sin(x) e^{-x}$ . Dann gilt:

☐  $f$  nimmt sein Minimum in  $x = \frac{3\pi}{2}$  und sein Maximum in  $x = \frac{\pi}{2}$  an.

☒  $f$  nimmt sein Minimum in  $x = \frac{5\pi}{4}$  und sein Maximum in  $x = \frac{\pi}{4}$  an.

☐  $f$  nimmt sein Minimum in  $x = 0$  und sein Maximum in  $x = \frac{\pi}{4}$  an.

☐  $f$  nimmt sein Minimum in  $x = 0$ , in  $x = \pi$  und in  $x = 2\pi$  an.

Frage 6 : Betrachte die Funktion  $f: ]-\pi, \pi[ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x) = \frac{e^{\cos(x)-1} - 1 - x^2}{(\sin(x))^2} .$$

Dann gilt:

☐  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$

☒  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{3}{2}$

☐  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

☐  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{2}$

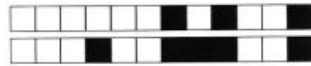
Frage 7 : Betrachte die komplexe Zahl  $z = e^i + e^{i/3}$ . Dann gilt:

☐  $|z| = \sqrt{2}$

☐  $|z| = \sqrt{1 + (e^{2i/3} + e^{-2i/3})}$

☐  $|z| = \sqrt{2 + 2(e^{i/3} + e^{-i/3})}$

☒  $|z| = \sqrt{2 + 2 \cos(\frac{2}{3})}$



**Frage 8 :** Betrachte die Funktion  $f: ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x) = 2 + \operatorname{Log} \left( \frac{2e + x}{x^2} \right).$$

Sei  $f^{-1}$  die inverse Funktion von  $f$  und  $y_0 := f(2e)$ . Dann gilt:

☐  $(f^{-1})'(y_0) = 2e + 1$

☐  $(f^{-1})'(y_0) = -\frac{1}{2e + 1}$

☒  $(f^{-1})'(y_0) = -\frac{4e}{3}$

☐  $(f^{-1})'(y_0) = \frac{3}{4e}$

**Frage 9 :** Seien  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $\beta \in \mathbb{R}$  so, dass die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)(x+2) & \text{wenn } x < 0, \\ \alpha x + \beta & \text{wenn } x \geq 0, \end{cases}$$

differenzierbar auf  $\mathbb{R}$  ist. Dann gilt:

☐  $f(3) = 9$

☐  $f(2) = 12$

☒  $f(-3) + f(1) = 7$

☐  $f'(2) = 2$

**Frage 10 :** Betrachte die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(e^{\frac{1}{x}})}{e^{\frac{1}{x}}} & \text{wenn } x \neq 0, \\ 0 & \text{wenn } x = 0, \end{cases}$$

und sei  $g: [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  die Einschränkung von  $f$  auf  $[0, \infty[$  und  $h: ]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  die Einschränkung von  $f$  auf  $] -\infty, 0]$ . Dann gilt:

☐  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

☐  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$

☐  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty$

☒  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

**Frage 11 :** Zu einer Funktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir eine Folge reeller Zahlen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  rekursiv durch  $a_0 = 1$  und  $a_n = g(a_{n-1})$  für  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Es konvergiert die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wenn  $g$  gegeben ist durch:

☒  $g(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$

☐  $g(x) = x + 1$

☐  $g(x) = -x^2 + 2x - 2$

☐  $g(x) = 2x - 2$



**Frage 12 :** Betrachte die Menge  $E \subset \mathbb{R}$ ,

$$E = \left\{ \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right) : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Dann gilt:

☒  $\inf E = -1 - \sin\left(\frac{\pi}{24}\right)$

☐  $\inf E = 0$

☐  $\inf E = -1$

☐  $\inf E = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

**Frage 13 :** Setze

$$I = \int_1^{e^3} \frac{\operatorname{Log}(x)}{x \sqrt{(\operatorname{Log}(x))^2 + 1}} dx.$$

Dann gilt:

☐  $I = \frac{1}{2}(\sqrt{10} - 1)$

☒  $I = \sqrt{10} - 1$

☐  $I = 2(\sqrt{10} - 1)$

☐  $I = \sqrt{10} + 1$

**Frage 14 :** Sei  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^3\varepsilon(x)$  mit  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$  die Taylor-Entwicklung dritter Ordnung der Funktion  $f: ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

um  $x = 0$ . Dann gilt:

☐  $a_3 = -\frac{1}{6}$

☒  $a_3 = \frac{5}{6}$

☐  $a_3 = 1$

☐  $a_3 = 5$

**Frage 15 :** Sei die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{wenn } x \neq 0, \\ 0 & \text{wenn } x = 0. \end{cases}$$

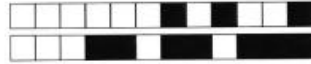
Dann gilt:

☐  $f$  ist drei mal differenzierbar auf  $\mathbb{R}$ .

☐  $f$  ist zwei mal differenzierbar auf  $\mathbb{R}$ , aber nicht drei mal.

☒  $f$  ist ein mal differenzierbar auf  $\mathbb{R}$ , aber nicht zwei mal auf  $\mathbb{R}$ .

☐  $f$  ist nicht differenzierbar auf  $\mathbb{R}$ .



**Frage 16 :** Sei  $R$  der Konvergenzradius der Potenzreihe  $S$ , definiert durch

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{5^{k+3}} x^k .$$

Dann gilt:

- ☒  $R = 5$   
☐  $R = 0$   
☐  $R = \frac{1}{5}$   
☐  $R = 25$

0/3

**Frage 17 :** Gegeben sei die Funktion  $f: [-1, 3] \rightarrow [-1, 3]$  definiert durch

$$f(x) = \sqrt{|x-1| + 2x} .$$

Dann gilt:

- ☐  $f$  ist unstetig in  $x = 1$   
☐  $f$  ist surjektiv  
☐  $f$  ist differenzierbar auf  $] -1, 3[$   
☒  $f$  ist injektiv

0/3

**Frage 18 :** Betrachte das uneigentliche (verallgemeinerte) Integral

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx .$$

Dann gilt:

- ☐  $I = 2 \operatorname{Log} \left( \frac{e-1}{e+1} \right)$   
☐  $I = -\operatorname{Log} (e^2 - 1)$   
☒  $I = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left( \frac{e+1}{e-1} \right)$   
☐ Das Integral  $I$  divergiert

0/3



## Zweiter Teil, Wahr/Falsch-Fragen

Kreuzen Sie bitte für jede der folgenden Fragen die Box WAHR an, wenn die Aussage **immer korrekt** ist, oder die Box FALSCH, wenn sie **nicht immer korrekt** ist, d.h. wenn die Aussage manchmal falsch ist.

**Frage 19 :** Die Funktion  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) = \sin\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$  kann in  $x = 0$  stetig fortgesetzt werden.

0/1

☒

WAHR

☐

FALSCH

**Frage 20 :** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  und  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen die stetig auf  $[a, b]$  und differenzierbar auf  $]a, b[$  sind, so dass  $f'(x) \leq g'(x)$  für alle  $x \in ]a, b[$ . Dann gilt  $f(x) \leq g(x)$  für alle  $x \in ]a, b[$ .

0/1

☐

WAHR

☒

FALSCH

**Frage 21 :** Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  eine divergente Reihe und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen so dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ . Dann konvergiert die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ .

0/1

☐

WAHR

☒

FALSCH

**Frage 22 :** Der Wert des Integrals  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x^{13}) dx$  ist Null.

0/1

☒

WAHR

☐

FALSCH

**Frage 23 :** Sei  $f: ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die folgende Taylor-Entwicklung in  $x = 0$  hat:  $f(x) = x - 2x^3 + x^3 \varepsilon(x)$ , mit  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ . Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 0.$$

0/1

☒

WAHR

☐

FALSCH

**Frage 24 :** Sei  $A \subset \mathbb{R}$  eine beschränkte Menge und  $c = \sup A$ . Dann gilt: Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert  $x \in A$  so dass  $x + \varepsilon \geq c$ .

0/1

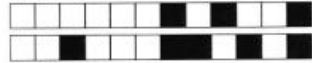
☒

WAHR

☐

FALSCH





**Frage 25 :** Sei  $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion so dass  $f([1, 2]) = ]1, 2[$ . Dann ist  $f$  nicht stetig auf  $[1, 2]$ .

0/1

☒ WAHR ☐ FALSCH

**Frage 26 :** Seien  $A \subset \mathbb{R}$  und  $B \subset \mathbb{R}$  zwei beschränkte Teilmengen von  $\mathbb{R}$  so dass  $A \cap B \neq \emptyset$  (leere Menge). Dann gilt  $\inf A \leq \inf A \cap B$ .

0/1

☒ WAHR ☐ FALSCH

**Frage 27 :** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen so, dass die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definiert durch  $b_n = \cos(a_n)$  konvergiert. Dann konvergiert die Folge  $(a_n)$ .

0/1

☐ WAHR ☒ FALSCH

**Frage 28 :** Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion differenzierbar in  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - 2h)}{h} = 2f'(x_0).$$

0/1

☒ WAHR ☐ FALSCH





## Dritter Teil

### Instruktionen:

- Dieser Teil entspricht **20%** der Prüfung.
- Im Allgemeinen sind die Fragen nicht Multiple Choice.
- Dennoch müssen die Antworten in die dazugehörigen Boxen eingetragen werden!
- Verwenden Sie die Rückseiten als Arbeitsflächen. Nur die Antworten in den Boxen werden berücksichtigt!
- Lassen Sie die Kästchen auf grauem Grund frei: Sie sind für die Korrektur vorgesehen.
- Manchmal sind mehrere Antworten richtig, oder auch keine!



**Frage A :** Diese Frage wird mit bis zu 9 Punkten bewertet.

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Hier nicht schreiben.

Ergänzen Sie diese Tabelle mit Beispielen von Folgen reeller Zahlen (eine pro Linie), die die angegebenen Eigenschaften haben.

(Die Bildmenge einer Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist die Menge  $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ .)

beschränkt aber nicht konvergent	
beschränkt aber ohne konvergente Teilfolge	
unbeschränkt aber mit konvergenter Teilfolge	
konvergent mit abgeschlossener Bildmenge	
divergent mit abgeschlossener Bildmenge	
konvergent mit nicht-abgeschlossener Bildmenge	
divergent mit nicht-abgeschlossener Bildmenge	
konvergent mit endlicher Bildmenge	
divergent mit endlicher Bildmenge	

In jeder Linie der Tabelle: wenn eine solche Folge nicht existiert, deuten Sie dies durch ein Kreuz an.



Frage B : Diese Frage wird mit bis zu 7 Punkten bewertet.

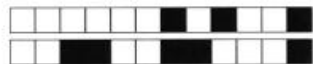
☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

Hier nicht schreiben.

Ergänzen Sie diese Tabelle mit Beispielen von geraden ( $f(-x) = f(x)$ ) Funktionen  $f: ]-2, 2[ \rightarrow \mathbb{R}$  (eine pro Linie), die die angegebenen Eigenschaften haben.  
(  $x$  ist Nullstelle von  $f$  wenn  $f(x) = 0$  )

beschränkt aber nicht stetig	
stetig aber nicht überall differenzierbar	
differenzierbar aber nirgends $f'(x_0) = 0$	
unbeschränkt	
stetig ohne Nullstelle	
ohne Nullstelle und $f(0) \cdot f(1) < 0$	
monoton	

In jeder Linie der Tabelle: wenn eine solche Funktion nicht existiert, deuten Sie dies durch ein Kreuz an.



+41/12/49+