XXX-1
Score: 0/80

+41/1/60+

Leh.: K.-D. Semmler - Analysis I - XXX

15 Januar 2018 - Dauer: 3 Stunden

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

41

XXX-1

SCIPER: **FAKE-1**

Drehen Sie diese Seite nicht um, bevor Sie dazu aufgefordert werden. Jedes Blatt hat eine Vorder- und eine Rückseite. Es gibt 12 Seiten, die letzten sind möglicherweise leer. Lösen Sie nicht die Heftklammern.

- Legen Sie Ihren Studentenausweis auf den Tisch.
- Es sind **keine** weiteren Unterlagen zugelassen.
- Die Nutzung eines **Taschenrechners** oder jedes anderen elektronischen Hilfsmittels ist während der Prüfung nicht gestattet.
- Für die **Multiple Choice** Fragen erhält man:

  $+3$ Punkte, wenn die Antwort richtig ist,

  0 Punkte, wenn die Frage nicht beantwortet ist oder mehrere Möglichkeiten angekreuzt sind, und

  -1 Punkt, wenn die Antwort falsch ist.
- Für die **Wahr/Falsch** Fragen erhält man:

  $+1$ Punkt, wenn die Antwort richtig ist,

  0 Punkte, wenn die Frage nicht beantwortet ist oder mehrere Möglichkeiten angekreuzt sind, und

  -1 Punkt, wenn die Antwort falsch ist.
- Benutzen Sie einen **Kugelschreiber mit schwarzer oder blauer Tinte** und verwenden Sie Korrekturflüssigkeit (z.B. Tipp-Ex) um bei Bedarf Ihre Antwort zu ändern.
- Falls eine Fragestellung einen Fehler enthält, darf der/die Unterrichtende die entsprechende Frage annulieren.
- Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien zum Markieren **der Antworten**:

oui | ja | sì | yes

non | nein | non | no

Erster Teil, Multiple-Choice-Fragen

Kreuzen Sie bitte für jede Frage die Box an, die zu der richtigen Lösung gehört. Es gibt **genau eine** richtige Antwort pro Frage.

Frage 1 : Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$, die Folge der Partialsummen. Wenn nun $\lim_{n\to+\infty} s_n = 1$, dann gilt:

- ☐ $\lim_{n\to+\infty} s_{2n} < 1$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} (s_{2n} - 2s_n) = 0$

0/3

- ☐ $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} (s_{2n} - s_n) = 0$

Frage 2 : Betrachte die Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n = \frac{\mathrm{Log}(n + e^n)}{n+1} .$$

Dann gilt:

- ☐ a_n ist eine unbeschränkte Folge.
- ☐ a_n ist eine beschränkte Folge und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

0/3

- ☐ a_n ist eine beschränkte Folge und $\lim_{n\to\infty} a_n = e$
- ☐ a_n ist eine beschränkte Folge und $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

Frage 3 : Betrachte die Reihe S gegeben durch

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{cn}} .$$

mit einem Parameter $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- ☐ S konvergiert genau dann wenn $c \geq 1$
- ☐ S konvergiert genau dann wenn $c \geq 0$

0/3

- ☐ S konvergiert genau dann wenn $2 > c > 0$
- ☐ S konvergiert genau dann wenn $c > 3$

Frage 4 : Setze

$$I = \int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-4x+4x^2}}\, dx \,.$$

Dann gilt:

- ☐ $I = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\left(6-\sqrt{33}\right)$
- ☐ $I = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,(5)$
- ☐ $I = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,(5)$
- ☐ $I = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Arcsin}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

0/3

Frage 5 : Gegeben sei die Funktion $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sin(x)\,\mathrm{e}^{-x}$. Dann gilt:

- ☐ f nimmt sein Minimum in $x = \frac{3\pi}{2}$ und sein Maximum in $x = \frac{\pi}{2}$ an.
- ☐ f nimmt sein Minimum in $x = \frac{5\pi}{4}$ und sein Maximum in $x = \frac{\pi}{4}$ an.
- ☐ f nimmt sein Minimum in $x = 0$ und sein Maximum in $x = \frac{\pi}{4}$ an.
- ☐ f nimmt sein Minimum in $x = 0$, in $x = \pi$ und in $x = 2\pi$ an.

0/3

Frage 6 : Betrachte die Funktion $f\colon\,]-\pi, \pi[\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\cos(x)-1} - 1 - x^2}{\left(\sin(x)\right)^2} \,.$$

Dann gilt:

- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$
- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{3}{2}$
- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{2}$

0/3

Frage 7 : Betrachte die komplexe Zahl $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}/3}$. Dann gilt:

- ☐ $|z| = \sqrt{2}$
- ☐ $|z| = \sqrt{1 + \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}/3} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}/3}\right)}$
- ☐ $|z| = \sqrt{2 + 2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}/3} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}/3}\right)}$
- ☐ $|z| = \sqrt{2 + 2\cos(\frac{2}{3})}$

0/3

Frage 8 : Betrachte die Funktion $f\colon]0,\infty[\;\to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = 2 + \operatorname{Log}\left(\frac{2\mathrm{e} + x}{x^2}\right).$$

Sei f^{-1} die inverse Funktion von f und $y_0 := f(2\mathrm{e})$. Dann gilt:

0/3

- ☐ $(f^{-1})'(y_0) = 2\mathrm{e} + 1$
- ☐ $(f^{-1})'(y_0) = -\dfrac{1}{2\mathrm{e}+1}$
- ☐ $(f^{-1})'(y_0) = -\dfrac{4\mathrm{e}}{3}$
- ☐ $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{3}{4\mathrm{e}}$

Frage 9 : Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)(x+2) & \text{wenn } x < 0\,, \\ \alpha x + \beta & \text{wenn } x \geq 0\,, \end{cases}$$

differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist. Dann gilt:

0/3

- ☐ $f(3) = 9$
- ☐ $f(2) = 12$
- ☐ $f(-3) + f(1) = 7$
- ☐ $f'(2) = 2$

Frage 10 : Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} & \text{wenn } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{wenn } x = 0\,, \end{cases}$$

und sei $g\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ die Einschränkung von f auf $[0,\infty[$ und $h\colon]-\infty,0] \to \mathbb{R}$ die Einschränkung von f auf $]-\infty,0]$. Dann gilt:

0/3

- ☐ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$
- ☐ $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$
- ☐ $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = -\infty$
- ☐ $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

Frage 11 : Zu einer Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren wir eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $a_0 = 1$ und $a_n = g(a_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Es konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wenn g gegeben ist durch:

0/3

- ☐ $g(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$
- ☐ $g(x) = x + 1$
- ☐ $g(x) = -x^2 + 2x - 2$
- ☐ $g(x) = 2x - 2$

0/3

Frage 12 : Betrachte die Menge $E \subset \mathbb{R}$,

$$E = \left\{ \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right) : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Dann gilt:

- [ ] $\operatorname{Inf} E = -1 - \sin\left(\frac{\pi}{24}\right)$
- [ ] $\operatorname{Inf} E = 0$
- [ ] $\operatorname{Inf} E = -1$
- [ ] $\operatorname{Inf} E = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

0/3

Frage 13 : Setze

$$I = \int_1^{e^3} \frac{\operatorname{Log}(x)}{x\sqrt{(\operatorname{Log}(x))^2 + 1}}\, dx.$$

Dann gilt:

- [ ] $I = \frac{1}{2}(\sqrt{10} - 1)$
- [ ] $I = \sqrt{10} - 1$
- [ ] $I = 2(\sqrt{10} - 1)$
- [ ] $I = \sqrt{10} + 1$

0/3

Frage 14 : Sei $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + x^3 \varepsilon(x)$ mit $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ die Taylor-Entwicklung dritter Ordnung der Funktion $f\colon\,]-1, 1[\to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

um $x = 0$. Dann gilt:

- [ ] $a_3 = -\frac{1}{6}$
- [ ] $a_3 = \frac{5}{6}$
- [ ] $a_3 = 1$
- [ ] $a_3 = 5$

0/3

Frage 15 : Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{wenn } x \neq 0, \\ 0 & \text{wenn } x = 0. \end{cases}$$

Dann gilt:

- [ ] f ist drei mal differenzierbar auf $\mathbb{R}$.
- [ ] f ist zwei mal differenzierbar auf $\mathbb{R}$, aber nicht drei mal.
- [ ] f ist ein mal differenzierbar auf $\mathbb{R}$, aber nicht zwei mal auf $\mathbb{R}$.
- [ ] f ist nicht differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

Frage 16 : Sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe S, definiert durch

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{5^{k+3}} x^k \; .$$

Dann gilt:

0/3

- ☐ $R = 5$
- ☐ $R = 0$
- ☐ $R = \frac{1}{5}$
- ☐ $R = 25$

Frage 17 : Gegeben sei die Funktion $f\colon [-1,3] \to [-1,3]$ definiert durch

$$f(x) = \sqrt{|x-1| + 2x} \; .$$

Dann gilt:

0/3

- ☐ f ist unstetig in $x = 1$
- ☐ f ist surjektiv
- ☐ f ist differenzierbar auf $]-1,3[$
- ☐ f ist injektiv

Frage 18 : Betrachte das uneigentliche (verallgemeinerte) Integral

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} - 1} \, \mathrm{d}x \; .$$

Dann gilt:

0/3

- ☐ $I = 2 \, \mathrm{Log}\left(\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}+1}\right)$
- ☐ $I = -\mathrm{Log}\left(\mathrm{e}^2 - 1\right)$
- ☐ $I = \frac{1}{2} \, \mathrm{Log}\left(\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}\right)$
- ☐ Das Integral I divergiert

Zweiter Teil, Wahr/Falsch-Fragen

Kreuzen Sie bitte für jede der folgenden Fragen die Box WAHR an, wenn die Aussage **immer korrekt** ist, oder die Box FALSCH, wenn sie **nicht immer korrekt** ist, d.h. wenn die Aussage manchmal falsch ist.

Frage 19 : Die Funktion $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sin\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$ kann in $x = 0$ stetig fortgesetzt werden.

0/1 ☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 20 : Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen die stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf $]a, b[$ sind, so dass $f'(x) \leq g'(x)$ für alle $x \in\ ]a, b[$. Dann gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in\ ]a, b]$.

0/1 ☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 21 : Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine divergente Reihe und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen so dass $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$.

0/1 ☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 22 : Der Wert des Integrals $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x^{13})\, dx$ ist Null.

0/1 ☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 23 : Sei $f\colon\ ]-1, 1[\ \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die folgende Taylor-Entwicklung in $x = 0$ hat: $f(x) = x - 2x^3 + x^3\varepsilon(x)$, mit $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Dann gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 0.$$

0/1 ☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 24 : Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Menge und $c = \operatorname{Sup} A$. Dann gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $x \in A$ so dass $x + \varepsilon \geq c$.

0/1 ☐ WAHR ☐ FALSCH

0/1 **Frage 25 :** Sei $f\colon [1,2] \to \mathbb{R}$ eine Funktion so dass $f\big([1,2]\big) =]1,2[$. Dann ist f nicht stetig auf $[1,2]$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

0/1 **Frage 26 :** Seien $A \subset \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}$ zwei beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ so dass $A \cap B \neq \emptyset$ (leere Menge). Dann gilt $\operatorname{Inf} A \leq \operatorname{Inf} A \cap B$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

0/1 **Frage 27 :** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen so, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $b_n = \cos(a_n)$ konvergiert. Dann konvergiert die Folge (a_n).

☐ WAHR ☐ FALSCH

0/1 **Frage 28 :** Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - 2h)}{h} = 2f'(x_0).$$

☐ WAHR ☐ FALSCH

Dritter Teil

Instruktionen:

- Dieser Teil entspricht **20%** der Prüfung.
- Im Allgemeinen sind die Fragen nicht Multiple Choice.
- Dennoch müssen die Antworten in die dazugehörigen Boxen eingetragen werden!
- Verwenden Sie die Rückseiten als Arbeitsflächen. Nur die Antworten in den Boxen werden berücksichtigt!
- Lassen Sie die Kästchen auf grauem Grund frei: Sie sind für die Korrektur vorgesehen.
- Manchmal sind mehrere Antworten richtig, oder auch keine!

0/9

Frage A : *Diese Frage wird mit bis zu 9 Punkten bewertet.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 *Hier nicht schreiben.*

Ergänzen Sie diese Tabelle mit Beispielen von Folgen reeller Zahlen (eine pro Linie), die die angegebenen Eigenschaften haben.
(Die Bildmenge einer Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist die Menge $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$.)

beschränkt aber nicht konvergent	
beschränkt aber ohne konvergente Teilfolge	
unbeschränkt aber mit konvergenter Teilfolge	
konvergent mit abgeschlossener Bildmenge	
divergent mit abgeschlossener Bildmenge	
konvergent mit nicht-abgeschlossener Bildmenge	
divergent mit nicht-abgeschlossener Bildmenge	
konvergent mit endlicher Bildmenge	
divergent mit endlicher Bildmenge	

In jeder Linie der Tabelle: wenn eine solche Folge nicht existiert, deuten Sie dies durch ein Kreuz an.

0/7

Frage B : *Diese Frage wird mit bis zu 7 Punkten bewertet.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 *Hier nicht schreiben.*

Ergänzen Sie diese Tabelle mit Beispielen von geraden ($f(-x) = f(x)$) Funktionen $f\colon\ ]-2,2[\to \mathbb{R}$ (eine pro Linie), die die angegebenen Eigenschaften haben.
(x ist Nullstelle von f wenn $f(x) = 0$)

beschränkt aber nicht stetig	
stetig aber nicht überall differenzierbar	
differenzierbar aber nirgends $f'(x_0) = 0$	
unbeschränkt	
stetig ohne Nullstelle	
ohne Nullstelle und $f(0) \cdot f(1) < 0$	
monoton	

In jeder Linie der Tabelle: wenn eine solche Funktion nicht existiert, deuten Sie dies durch ein Kreuz an.