Prof./Ens. XXX - Examen de XXX - Section XX

Date - durée : XhYYm

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

ID

NOM DE L'ETUDIANT

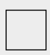
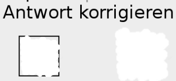
SCIPER : **SCIPER**

Signature :

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient XX pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - +3 points si la réponse est correcte,
  - 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses inscrites,
  - −1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - +1 point si la réponse est correcte,
  - 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses inscrites,
  - −1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren
		

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Frage 1 Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^{\frac{2}{\alpha}}\left(n^{2\alpha}+1\right)}}$$

konvergiert wenn

- ☐ $\alpha = \frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{1}{2} < \alpha < 1$
- ☐ $1 < \alpha < 2$
- ☐ $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

Frage 2 Der Imaginärteil von $(-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})^5$ ist

- ☐ $16\sqrt{3}$
- ☐ $32\sqrt{3}\,\mathrm{i}$
- ☐ $-16\sqrt{3}$
- ☐ $32\sqrt{3}$

Frage 3 Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right) & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

gegeben. Dann gilt:

- ☐ f ist stetig auf $\mathbb{R}$, sowie rechtsseitig aber nicht linksseitig differenzierbar in 0.
- ☐ f ist stetig auf $\mathbb{R}$, sowie linksseitig aber nicht rechtsseitig differenzierbar in 0.
- ☐ f ist differenzierbar aber nicht stetig auf $\mathbb{R}$.
- ☐ $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Frage 4 Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} (ax+1)(bx-1) & \text{für } x \geq 0 \\ \sin(a^2x) - b & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

differenzierbar an der Stelle 0?

- ☐ $a = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ und $b = -1$
- ☐ $a = \pm 1$ und $b = 1$
- ☐ $a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ und $b = 1$
- ☐ $a = \pm 1$ und $b = -1$

Frage 5 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$ gegeben. Das Taylor-Polynom der Ordnung 3 von f um $x_0 = 0$ ist

- ☐ $\frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{24}$
- ☐ $\frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{48}$
- ☐ $\frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x^3}{48}$
- ☐ $\frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48}$

Frage 6 Sei $A = \left\{x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} : \frac{1}{\log(x)} < 1\right\}$. Dann gilt:

- ☐ $\inf A = e$
- ☐ A ist nicht nach unten beschränkt
- ☐ $\inf A = 0$
- ☐ $\sup A = e$

Frage 7 Sei $I := \int_0^2 e^{x^2}\, \mathrm{d}x$. Dann gilt:

- ☐ $2 \leq I \leq 200$
- ☐ $I \geq 200$
- ☐ $I = \exp\left(\frac{8}{3}\right) - 1$
- ☐ $0 \leq I < \frac{14}{3}$

Frage 8 Sei $I = \int_1^2 x \log(1 + x)\, \mathrm{d}x$. Dann gilt:

- ☐ $I = 2\log(3) + \frac{1}{2}\log(2)$
- ☐ $I = 2\log(3) - \frac{1}{2}\log(2)$
- ☐ $I = \frac{3}{2}\log(3) - \frac{1}{4}$
- ☐ $I = \frac{1}{2}\log(2) + \frac{1}{4}$

Frage 9 Das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^{3/2} + 3}{x^3}\, \mathrm{d}x$

- ☐ konvergiert und ist $8/3$
- ☐ divergiert
- ☐ konvergiert und ist $7/2$
- ☐ konvergiert und ist $-7/2$

Frage 10 Gegeben seien drei Funktionen $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\sin(1/x) & \text{für } x > 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x \leq 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} x\sinh(1/x) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

und

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x > 0 \\ x\log(|x|) & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Welche dieser drei Funktionen sind stetig in $x = 0$?

- ☐ f, g und h
- ☐ f und h
- ☐ f und g
- ☐ g und h

Frage 11
Man betrachte die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right)$ für $n \in \mathbb{N}^*$. Dann gilt:

- ☐ $\limsup_{n\to\infty} a_n = 2$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = -2$
- ☐ $\limsup_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$
- ☐ $\limsup_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\sqrt{2}$
- ☐ $\limsup_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\sqrt{2}$

Frage 12 Sei $a_n = \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ für $n \in \mathbb{N}^*$. Dann

- ☐ divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.
- ☐ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sie konvergiert aber nicht absolut.
- ☐ konvergieren die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.
- ☐ divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Frage 13
Sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{(n^b)} x^n$.

- ☐ Für $b = 1$ gilt $R = e^{-1}$.
- ☐ Für $b = 2$ gilt $R = 1$.
- ☐ Für $b = 3$ gilt $R = e$.
- ☐ Für $b = 4$ gilt $R = e^2$.

Frage 14 Der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{5n + \sqrt{3n - \sqrt{2n}}}}$$

- ☐ existiert und ist $\frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{3-\sqrt{2}}}}$.
- ☐ existiert und ist $\frac{1}{\sqrt{6}}$.
- ☐ existiert und ist $\frac{1}{\sqrt{5}}$.
- ☐ existiert nicht.

Frage 15 Für $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ betrachte man die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ mit $x_{n+1} = f(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}$ und einem fest gewählten $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

- ☐ Für $x_0 = -2$ konvergiert die Folge gegen $-\sqrt{2}$.
- ☐ Es gibt kein x_0 für welche die Folge gegen $-\sqrt{2}$ konvergiert.
- ☐ Für $x_0 = 1/\sqrt{2}$ konvergiert die Folge gegen $-\sqrt{2}$.
- ☐ Für $x_0 = 1$ konvergiert die Folge gegen $-\sqrt{2}$.

Frage 16 Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{3^n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann

- ☐ konvergiert die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ gegen 0 für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$.
- ☐ divergiert die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$.
- ☐ konvergiert die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ gegen x_0 für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$.
- ☐ konvergiert die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ gegen $x_0 - \frac{3}{2}$ für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$.

Frage 17 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = |x\cos(x)|$ gegeben. Dann gilt:

- ☐ Es existiert ein $u \in \left]-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right[$ so dass $f'(u) = 0$.
- ☐ Es existiert ein $u \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ so dass $f'(u) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- ☐ f ist monoton wachsend auf $u \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
- ☐ f hat genau ein lokales Minimum in $\mathbb{R}$.

Frage 18 Sei $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \sin(\arctan(\sqrt{x}))$ gegeben. Das Bild von f ist

- ☐ $]0, 1]$
- ☐ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right[$
- ☐ $[-1, 1]$
- ☐ $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Frage 19 Für jede komplexe Zahl $\omega \in \mathbb{C}$ mit $\omega \neq 0$ gibt es unendlich viele komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ so dass $\mathrm{Im}(\omega z) = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Frage 20 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ist f differenzierbar an der Stelle x_0 so ist die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \sin(f(x))$ ebenfalls differenzierbar an der Stelle x_0.

☐ VRAI ☐ FAUX

Frage 21 Gegeben sei eine Funktion $f \in C^\infty(]-1,1[)$ mit der Taylor-Entwicklung $f(x) = 1 + 2x + x^2 + o(x^3)$ um $x_0 = 0$. Dann hat die Funktion $(f(x))^2$ die Taylor-Entwicklung $(f(x))^2 = 1 + 4x^2 + o(x^3)$ um $x_0 = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Frage 22 Eine streng monotone Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ ist stets bijektiv.

☐ VRAI ☐ FAUX

Frage 23 Für eine gegebene monoton wachsende und beschränkte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $a_n = f(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Cauchy-Folge.

☐ VRAI ☐ FAUX

Frage 24 Sei

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dann ist f in genau zwei Punkten stetig.

☐ VRAI ☐ FAUX

Frage 25 Sei die Funktion $f\colon [-1,1] \to [-1,1]$ bijektiv und stetig. Dann gilt $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Frage 26 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion und für $x_0 \in \mathbb{R}$ gelte

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0).$$

Dann ist f linksseitig differenzierbar in x_0.

☐ VRAI ☐ FAUX

Frage 27 Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} (3x)^k$ ist 3.

☐ VRAI ☐ FAUX

Frage 28 Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Dann gilt: Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, so konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Dritter Teil, Offene Fragen

Beantworten Sie die Fragen im eingerahmten Bereich. In diesem Teil der Prüfung müssen die Lösungen begründet werden: Der Rechenweg muss erkennbar und jeder Schritt begründet sein. Die grau markierten Kästchen bitte frei lassen, sie werden für die Korrektur benötigt.

Frage 29: *Diese Frage zählt 4 Punkte.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

(a) Geben Sie ein Beispiel für eine Folge, die streng monoton wachsend und beschränkt ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine streng monton wachsende Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

(c) Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f : [-1, 0[\to \mathbb{R}$, die stetig aber nicht gleichmässig stetig auf $[-1, 0[$ ist.

(d) Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) \neq 0$ so dass f eine Stammfunktion von f ist.

Frage 30: *Diese Frage zählt 7 Punkte.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7

Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie: Gilt $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, so gibt es $\xi \in]1, 3[$ mit $f''(\xi) = 0$.

(b) Zeigen Sie: Ist f konvex und $f(1) = f(2)$ dann hat f ein (globales) Minimum im Intervall $]1, 2[$.

Frage 31: *Diese Frage zählt 5 Punkte.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Seien $f \in C^1(]a,b[)$ und $x_0 \in]a,b[$. Zeigen Sie:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0 + 2h)}{h} = -4f'(x_0).$$