Kapitel 4

Komplexe Zahlen

Die Menge der komplexen Zahlen *[nombres complexes]* (oder auch: komplexe Ebene *[plan complexe]*) ist definiert als

$$\mathbb{C} = \{x + \mathrm{i}y : \ x, y \in \mathbb{R}\},$$

wobei i die **imaginäre Einheit** *[l'unité imaginaire]* ist mit $\mathrm{i}^2 = -1$.

Für eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ heisst x **Realteil** *[partie reelle]* und y **Imaginärteil** *[partie imaginaire]* von z. Wir schreiben $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$.

4.1 Operationen mit komplexen Zahlen

Vom algebraischen Standpunkt betrachtet, sind komplexe Zahlen einfach Paare von reellen Zahlen und die Bezeichnung $x + \mathrm{i}y$ hilft lediglich, sich die folgenden Operationen besser merken zu können. Wir definieren auf $\mathbb{C}$ die folgenden Operationen als **Addition** und **Multiplikation**:

$$\begin{aligned} + : \quad & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad (x_1 + \mathrm{i}y_1) + (x_2 + \mathrm{i}y_2) := (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2), \\ \cdot : \quad & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad (x_1 + \mathrm{i}y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{i}y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + y_1x_2). \end{aligned}$$

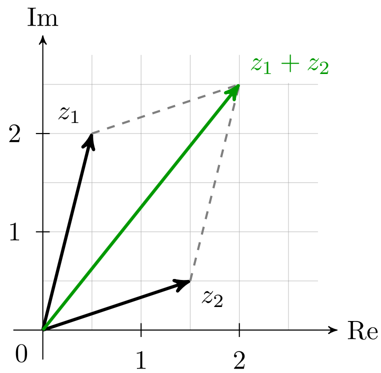
Es ist eine einfache (wenn auch lästige) Übung nachzuweisen, dass die üblichen Rechenregeln für Addition und Multiplikation, also Axiom 1 a)–g) und Axiom 1 i), auch für komplexe Zahlen gelten.

Die komplexe **Konjugierte** *[le conjugué]* einer komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ entsteht durch Wechsel des Vorzeichens vom Imaginärteil:

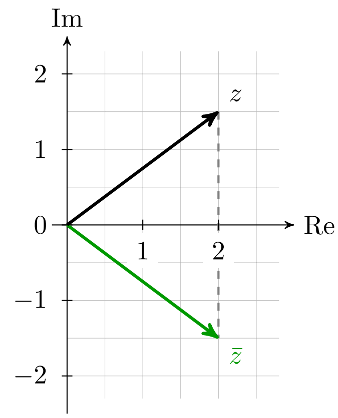
$$\overline{z} := x - \mathrm{i}y.$$

Die Konjugation verträgt sich gut mit der Addition und Multiplikation; es gelten

$$\boxed{\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.} \tag{4.1}$$



Addition zweier komplexer Zahlen



Komplexe Konjugation

Abbildung 4.1. *Addition und Konjugation in der komplexen Zahlenebene*

Bei der Addition sieht man dies sofort ein. Bei der Multiplikation lässt sich das auch einfach nachrechnen:

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= (x_1x_2 - y_1y_2) - \mathrm{i}(x_1y_2 + y_1x_2)\\ &= (x_1x_2 - (-y_1)\cdot(-y_2)) + \mathrm{i}(x_1 \cdot (-y_2) + (-y_1)\cdot x_2)\\ &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.\end{aligned}$$

Mittels der Konjugierten lassen sich Real- und Imaginärteile einer komplexen Zahl rekonstruieren. Aus

$$\begin{aligned}z + \overline{z} &= x + \mathrm{i}y + x - \mathrm{i}y = 2x\\ z - \overline{z} &= x + \mathrm{i}y - x + \mathrm{i}y = 2\mathrm{i}y\end{aligned}$$

folgen die Beziehungen

$$\boxed{\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \qquad \mathrm{i}\cdot\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2}(z - \overline{z}).}$$

Der **Betrag** einer komplexen Zahl *[module d'un nombre complexe]* ist die euklidische Länge des Vektors $\binom{x}{y}$ in der komplexen Zahlenebene:

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Es gilt die Dreiecksungleichung

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Ausserdem gilt die wichtige Beziehung

$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Für $z \neq 0$ (d.h., Real- und Imaginärteil sind nicht gleichzeitig Null) folgt also $z \cdot \overline{z}/|z|^2 = 1$ oder, anders ausgedrückt:

$$\boxed{z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}}$$

Damit können wir die Division z_1/z_2 für $z_2 \neq 0$ wie folgt definieren

$$\frac{z_1}{z_2} := z_1 z_2^{-1} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Zusammenfassend ergibt sich die folgende Aussage.

Theorem 4.1 $\mathbb{C}$ *ist ein Körper, d.h., alle Rechenregeln von Axiom 1 sind erfüllt.*

Es ist nicht möglich, zwei komplexe Zahlen z_1, z_2 sinnvoll zu vergleichen. Insbesondere gibt es keine Ordnung, die alle Forderungen von Axiom 2 erfüllt. Daher ist es auch nicht möglich, die Begriffe des Supremums oder Infimums auf komplexe Zahlen sinnvoll zu übertragen.

4.2 Polarform

Komplexe Zahlen können als Vektoren in der Ebene aufgefasst werden; siehe auch Abbildung 4.1. Die Polarform *[forme polaire]* des Vektors ergibt die Darstellung

$$z = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi),$$

wobei $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ der Betrag von $z = x + \mathrm{i}y$ ist und man den Winkel φ auch als **Argument** *[argument]* (oder **Phase**) von z bezeichnet. Wir schreiben $\varphi = \arg(z)$; es ist aber zu beachten dass das Argument nur bis auf $2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ eindeutig bestimmt ist. Manchmal wird das Argument auf ein Intervall eingeschränkt, z. B. $\varphi \in]-\pi, \pi]$, um es eindeutig festzulegen.

Für $z \neq 0$ berechnet man das Argument φ von $z = x + \mathrm{i}y$ mittels der trigonometrischen Beziehungen aus

$$\varphi = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{für } x > 0 \text{ und } y \in \mathbb{R}, \\ \pi/2 & \text{für } x = 0 \text{ und } y > 0, \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{für } x < 0 \text{ und } y \geq 0, \\ \arctan(y/x) - \pi & \text{für } x < 0 \text{ und } y < 0, \\ -\pi/2 & \text{für } x = 0 \text{ und } y < 0. \end{cases}$$

Für $z = 0$ lässt man das Argument einfach undefiniert.

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen in Polarform lässt sich mit Hilfe der Additionstheoreme wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)\cdot\rho_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) \\ &= \rho_1\rho_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Also ist das Argument von $z_1 z_2$ die Summe der Argumente von z_1 und z_2, bis auf Addition/Subtraktion von $2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Geometrisch bedeutet (4.2): Die Multiplikation mit z_2 verlängert z_1 um den Faktor ρ_2 und dreht den Winkel von z_1 im entgegensetzten Uhrzeigersinn um φ_2. Aus dieser Multiplikationsregel ergibt sich die folgende bequeme Formel für die Potenzierung komplexer Zahlen:

$$\boxed{\text{Formel von Moivre: } z^n = \big[\rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)\big]^n = \rho^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi).}$$

Umgekehrt sind die n Zahlen

$$\omega_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

allesamt n-te Wurzeln von $z = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, das heisst, sie erfüllen die Beziehung $\omega^n = z$.

4.3 Folgen und Reihen von komplexen Zahlen

Eine Folge komplexer Zahlen (z_n) entspricht zwei Folgen reeller Zahlen (x_n) und (y_n) mit

$$z_n = x_n + \mathrm{i}y_n\ .$$

Somit können wir sagen, dass (z_n) gegen $z_\infty = x_\infty + y_\infty \mathrm{i}$ konvergiert genau dann wenn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_\infty$. Alternativ kann man auch Definition 2.3 entsprechend anpassen.

Definition 4.2 *Eine Folge (z_n) von komplexen Zahlen* **konvergiert** *genau dann gegen ein $z_\infty \in \mathbb{C}$, wenn für jedes (noch so kleine) $\varepsilon > 0$ ein $N = N_\varepsilon$ existiert, so dass*

$$|z_\infty - z_n| \le \varepsilon \quad \text{für alle } n \ge N.$$

Wir nennen z_∞ **Grenzwert** *von (z_n) und schreiben $z_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ oder auch $z_n \overset{n\to\infty}{\to} z_\infty$.*

Beide Definitionen (Definition 4.2 vs. Konvergenz Real+Imaginärteil) sind äquivalent. Von den Konvergenzkriterien für Folgen von reellen Zahlen lassen sich nur das Quotientenkriterium und das Cauchy-Kriterium direkt übertragen. Die anderen Kriterien (Konvergenz monotoner Folgen, zwei Polizisten, $\liminf = \limsup$) können aufgrund der fehlenden Vergleichsmöglichkeit nicht direkt auf komplexe Zahlen sondern nur auf Real- und Imaginärteil separat angewendet werden.

Anhand der obigen Definition lässt sich nun auch eine **Reihe** von komplexen Zahlen als Partialsummenfolge mit dem entsprechenden Grenzwert definieren.

Beispiel 4.3 Für eine komplexe Zahl $z = 0 + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $y \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Reihe, d.h., die Partialsummenfolge (S_n) von

$$e^{\mathrm{i}y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}y)^k}{k!} \,.$$

Wir sehen, dass die Terme für gerades k reell sind, während die Terme für ungerades k rein imaginär sind. Wir können also für jedes $n \in \mathbb{N}$ schreiben:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}y)^k}{k!} = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ gerade}}}^{n} \frac{(\mathrm{i}y)^k}{k!} + \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ ungerade}}}^{n} \frac{(\mathrm{i}y)^k}{k!} \\
&= \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ gerade}}}^{n} \frac{(-1)^{\frac{k}{2}} y^k}{k!} + \mathrm{i} \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ ungerade}}}^{n} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}} y^k}{k!} \\
&= \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^m \frac{y^{2m}}{(2m)!} + \mathrm{i} \sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^m \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!} \\
&=: a_n + b_n i
\end{aligned}$$

Also sind $a_n = \mathrm{Re}(S_n)$ und $b_n = \mathrm{Im}(S_n)$ Partialsummen der konvergenten Reihen (Quotientenkriterium)

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{y^{2m}}{(2m)!} \qquad \text{und} \qquad \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Insgesamt haben wir die folgende wichtige Beziehung für $y \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{e^{\mathrm{i}y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}y)^k}{k!} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{y^{2m}}{(2m)!} + \mathrm{i} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!}.} \tag{4.3}$$

◇

Definition 4.4 *Die* **Exponentialfunktion** *[fonction exponentielle] einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist durch die Potenzreihe*

$$\exp(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

definiert. Diese Potenzreihe konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$.

Man kann auch zeigen, dass

$$\exp(z) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ gilt. Die bereits für reelle Zahlen bekannte Beziehung (siehe Lemma 3.18)

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_1}$$

gilt auch für komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

4.4 Potenzreihen von trigonometrischen Funktionen

Die beiden Potenzreihen in (4.3) haben eine besondere Bedeutung; der **Cosinus** und **Sinus** von komplexen Zahlen werden so definiert:

$$\cos z := \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!}, \qquad \sin z := \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Man rechnet leicht nach, dass

$$\cos z = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}. \tag{4.4}$$

Ausserdem lässt sich die Beziehung (4.3) jetzt kürzer schreiben:

$$e^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i} \sin y, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Die rechte Seite dieser sogenannten **Euler'schen Formel** *[Formule d'Euler]* kennen wir bereits von der Polarform einer komplexen Zahl. Es gilt insbesondere

$$z = \rho(\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi) = \rho e^{\mathrm{i}\varphi}.$$

Ähnlich zu Cosinus und Sinus lassen sich auch der **Cosinus Hyperbolicus** *[cosinus hyperbolique]* und **Sinus Hyperbolicus** *[sinus hyperbolique]* einer komplexen (oder auch reellen) Zahl z definieren:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m}}{(2m)!}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

Man kann zeigen, dass diese Potenzreihen für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergieren (d.h. der Konvergenzradius ist unendlich).

Die üblichen Eigenschaften sind im folgenden Theorem zusammengefasst und schnell nachgerechnet.

Theorem 4.5 *Für reelles $r \in \mathbb{R}$ sind*

$$\cos r \ ; \ \sin r \ ; \ \cosh r \ ; \ \sinh r$$

reelle Zahlen und es gelten die folgenden Identitäten ($z, w \in \mathbb{C}; x, y \in \mathbb{R}$):

$$\cos(z) = \cosh(\mathrm{i}\, z) \ \textit{und} \ \mathrm{i}\, \sin(z) = \sinh(i\, z)$$

$$\cos(-z) = \cos z \ \textit{und} \ \sin(-z) = -\sin z$$

$$\begin{aligned}
\cos(z \pm w) &= \cos(z)\cos(w) \mp \sin(z)\sin(w) \\
\sin(z \pm w) &= \sin(z)\cos(w) \pm \cos(z)\sin(w) \\
1 &= \cos^2 z + \sin^2 z \\
e^{iz} &= \cos z + \mathrm{i} \sin z \\
e^{x+\mathrm{i}y} &= e^x(\cos y + \mathrm{i} \sin y) \\
|e^{x+\mathrm{i}y}| &= e^x \\
(\cos z + \mathrm{i} \sin z)^n &= \cos(nz) + \mathrm{i} \sin(nz) \ \textit{wenn} \ n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

$$\cosh(z) = \cos(\mathrm{i}\, z) \; \textit{und} \; \mathrm{i} \sinh(z) = \sin(i\, z)$$
$$\cosh(-z) = \cosh z \; \textit{und} \; \sinh(-z) = -\sinh z$$
$$\begin{aligned}
\cosh(z \pm w) &= \cosh(z)\cosh(w) \pm \sinh(z)\sinh(w) \\
\sinh(z \pm w) &= \sinh(z)\cosh(w) \pm \cosh(z)\sinh(w) \\
1 &= \cosh^2 z - \sinh^2 z \\
e^z &= \cosh z + \sinh z
\end{aligned}$$

4.5 Der Logarithmus

Für gegebenes $z \in \mathbb{C}$ betrachten wir die Gleichung

$$z = e^w \tag{4.5}$$

und stellen uns die üblichen Fragen: Für welche z gibt es Lösungen in $\mathbb{C}$, sind sie eindeutig etc. Wenn eine solche Lösung w existiert, nennen wir sie **Logarithmus** *[logarithme]* von z.

Wir betrachten zunächst den Logarithmus von reellen Zahlen, also die Gleichung

$$r = e^x, \qquad \text{mit } r, x \in \mathbb{R}\,. \tag{4.6}$$

Es ist leicht zu sehen, dass für $x \in \mathbb{R},\ x \geq 0$ gilt

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1$$

und $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$. Somit kann es *keine* Lösung der Gleichung (4.6) für $r = 0$ geben. Es kann auch *keine reelle* Lösung für $r < 0$ geben. Wie wir gleich sehen werden, existiert für alle anderen Fälle, also $r > 0$, *genau eine reelle* Lösung x. Diese bezeichnen wir als (natürlichen) Logarithmus von z mit

$$x = \log r.$$

Oft schreibt man auch $\ln r$ anstatt von $\log r$.

Aus $e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$ folgt

$$\log r_1 + \log r_2 = \log(r_1 \cdot r_2), \qquad r_1, r_2 \in \mathbb{R}. \tag{4.7}$$

Lemma 4.6 *Für jedes $r \in \mathbb{R},\ r > 0$ existiert ein eindeutiges $x \in \mathbb{R}$ das die Beziehung*

$$e^x = r \qquad \textit{oder auch} \qquad x = \log r$$

erfüllt. Wenn $r \in]0\,,\,2]$ erhält man dieses x aus der Potenzreihe

$$x := -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(r-1)^k}{k}$$

Insbesondere gilt also $\log 2 = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$. *Wenn* $r > 2$, *so existiert* $n \in \mathbb{N}$, *so dass* $r \in]2^n, 2^{n+1}]$ *und man setzt*

$$x := n \log 2 - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(r-2^n)^k}{2^{nk} k}$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist 2^n*; sie konvergiert also für jedes* $r \in]0, 2^{n+1}]$.

Hier treffen wir für $r = 2$ unsere alte Freundin, die alternierende harmonische Reihe, wieder.

Wie lässt sich Lemma 4.6 auf komplexe Zahlen erweiteren? Wir zerlegen dazu $w = \mathrm{Re}(w) + \mathrm{i} \cdot \mathrm{Im}(w)$:

$$z = e^w = e^{\mathrm{Re}(w)} \big(\cos \mathrm{Im}(w) + \mathrm{i} \sin \mathrm{Im}(w) \big). \tag{4.8}$$

Dies ist (fast) die Polarform von z, ausser dass $\mathrm{Im}(w)$ nicht notwendigerweise auf $]-\pi, \pi]$ eingeschränkt ist. Nehmen wir die Einschränkung $-\pi < \mathrm{Im}(w) \leq \pi$ noch vor, so erhält man den komplexen Logarithmus.

Definition 4.7 *Der* **Hauptwert des Logarithmus** *[détermination principale du logarithme] einer komplexen Zahl* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *ist gegeben durch*

$$\log z := \log |z| + \mathrm{i} \arg(z), \quad \arg(z) \in]-\pi, \pi].$$

Man sieht leicht, dass sich die Gleichung (4.8) nicht verändert, wenn der Imaginärteil von w um $2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ verschoben wird. Also erfüllt

$$w_k = \log |z| + \mathrm{i} \big(\arg(z) + 2k\pi \big)$$

ebenfalls $e^{w_k} = z$. Diese Lösung wird als k-ter Nebenwert (für $k \neq 0$) oder k-ter Zweig der Logarithmusfunktion bezeichnet.

Man muss bei Logarithmen von komplexen Zahlen ein wenig aufpassen. Zum Beispiel gilt die Beziehung (4.7) nur nachdem das Argument von $\log w_1 + \log w_2$ um entsprechende ganzzahlige Vielfache von 2π verschoben wurde. So ist

$$\log(\mathrm{i}^3) = \log(-\mathrm{i}) = \log(1) - \mathrm{i}\frac{\pi}{2} = -\mathrm{i}\frac{\pi}{2}, \qquad 3 \log \mathrm{i} = \mathrm{i}\frac{3\pi}{2}.$$

Also gilt die Beziehung $\log(\mathrm{i}^3) = 3 \log \mathrm{i}$ nur nachdem das Argument von $3 \log \mathrm{i}$ um -2π verschoben wurde.

Der Logarithmus erlaubt es rationale und sogar komplexe Potenzen zu definieren.

Definition 4.8 *Seien* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *und* $\alpha \in \mathbb{C}$. *Dann definieren wir*

$$z^\alpha := e^{\alpha \log z}.$$