Serie 6 – Analyse I (Allemand). Abgabe: 14.10.2024

Herbst/Winter '24
Prof. J. Krieger
T. Schmid

(A1) Multiple Choice

a) Es gibt genau drei verschiedene Zahlen $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ so dass $z_j^3 = 1$ für alle $j = 1, \ldots, 3$.

◯ richtig ◯ falsch

b) Zu jeder komplexen Zahl z gibt es vier verschiedene Zahlen z_1, z_2, z_3, z_4 so dass $z_i^4 = z$ für alle $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

◯ richtig ◯ falsch

c) Wieviele Lösungen besitzt die Gleichung $z^{-1} = z$ in $\mathbb{C}$?

◯ 0 ◯ 2
◯ 1 ◯ unendlich.

d) Wieviele Lösungen besitzt die Gleichung $z^{-1} = \bar{z}$ in $\mathbb{C}$?

◯ 0 ◯ 2
◯ 1 ◯ unendlich.

e) Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - 3\mathrm{i})^k}{2(k!)}$$

◯ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$. ◯ konvergiert nur für $z = 3\mathrm{i}$.
◯ konvergiert nur für $z \in \mathbb{R}$. ◯ divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

(A2) Exponentialfunktion

Beweisen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $\exp(\frac{1}{2}x) = \sqrt{\exp(x)}$. b) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

Hinweis: Lemma 3.17 und Lemma 3.18 in Kapitel 3 können für die Aufgabe hilfreich sein.

(A3) Reihen II

Bestimmen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren. Die Berechnung des eventuellen Grenzwertes ist nicht nötig.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^k}{k \cdot 2^k}$ c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2 - 1}{(k-1)^3}$ e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^6 + 2k^4 + k}{2k^6 + 5k^3 + 1}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4k^2+1} - 2k - 1}{k^2}$ f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-8)^k}{9k+4}$

Hinweis: Das Majorantenkriterium und das Quotientenkriterium in Kapitel 3 des Skripts könnten dabei hilfreich sein.

(A4) Rechenregeln für komplexe Zahlen

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke so weit wie möglich. Geben Sie das Resultat in der kartesischen Form $z = x + \mathrm{i}y$ an.

a) $(2 + \mathrm{i}) + (1 - 3\mathrm{i})$

b) $(2 + \mathrm{i})(4 - 8\mathrm{i})$

c) $(1 - 4\mathrm{i})(1 - 3\mathrm{i})$

d) $\dfrac{1 - 2\mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}}$

e) $\dfrac{-1 + 3\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}$

f) $|(2 - 2\mathrm{i}) + (5 - 4\mathrm{i})|$

g) $\left|\dfrac{2 - 3\mathrm{i}}{5 + 4\mathrm{i}}\right|$

h) $\overline{(3 + 4\mathrm{i})(-3\mathrm{i})}$

(A5) Eigenschaften Komplexer Zahlen

Beweisen Sie, dass die folgenden Eigenschaften für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gelten:

a) $z_1 z_2 = z_2 z_1$

b) $(z_1 z_2)^{-1} = z_1^{-1} z_2^{-1}$

Hinweis: Benutzen Sie für b) die Darstellung des Inversen mit Hilfe der Konjugation.

(A6) Darstellung von komplexen Mengen

Stellen Sie die Mengen, die durch folgende Relationen definiert sind, in der komplexen Ebene graphisch dar.

a) $\mathrm{Re}(z) > 0$

b) $\mathrm{Im}(z) \leq 1$

c) $|\mathrm{Im}(z)| < 1$

d) $0 < \mathrm{Re}\, z < 1$

e) $|z| \leq 2$

f) $|z - \mathrm{i}| > 1$

g) $0 < |z + \mathrm{i}| < 2$

h) $1 \leq |z - 1| < 2$

(A7) Reihe mit Parameterabhängigkeit

Bestimmen Sie die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\alpha^{2n} - 1}$$

in Abhängigkeit des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0, \alpha \neq 1$.

Verwendnen Sie dazu das Wurzel-Kriterium und benutzen Sie (die unbewiesene Aussage), dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha^n + C} = \alpha \; \forall C \in \mathbb{R}$, wenn $\alpha > 1$.