Herbst/Winter '24
Prof. J. Krieger
T. Schmid

(A1) Multiple Choice

a) Gegeben sei eine Folge (x_n) so dass $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Folge (q_n) der Quotienten

$$q_n = |\frac{x_{n+1}}{x_n}|.$$

Wenn die Folge (x_n) gegen 0 konvergiert, dann konvergiert die Folge (q_n) ebenfalls.

◯ richtig ◯ falsch

Wenn $\lim_{n\to\infty} q_n \leq 1$ gilt, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

◯ richtig ◯ falsch

b) Eine Potenzreihe kann den Konvergenzradius $R = 0$ besitzen.

◯ richtig ◯ falsch

c) Unabhängig von der Folge (b_k) konvergiert jede Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - x_0)^k$ im Punkt $x = x_0$.

◯ richtig ◯ falsch

d) Gegeben sei die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - \pi)^k$ mit Konvergenzradius $R = 2$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

◯ $\sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\frac{5}{2}\right)^k$ konvergiert.
◯ $\sum_{k=0}^{\infty} b_k 2^k$ konvergiert.
◯ $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - 3)^k$ konvergiert für alle $x \in [1, 5]$.
◯ $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - 3)^k$ konvergiert für alle $x \in]2, 3]$.

(A2) Grenzwerte mittels Partialbruchzerlegung

a) Finden Sie A und B, so dass

$$\frac{1}{k(k+4)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+4}, \quad \forall k > 0.$$

Dies ist eine sogenannte Partialbruchzerlegung.

b) Berechnen Sie mit Hilfe von (a) den Wert für $n \geq 5$ der Summe $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+4)}$.

c) Berechnen Sie mit Hilfe von (b) den Grenzwert $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+4)}$.

(A3) Induktionsbeweise II

Die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ sei rekursiv definiert durch

$$x_1 = 5, \quad x_{n+1} = 2x_n.$$

Beweisen Sie per Induktion, dass $(x_n)_{n\geq 1}$ die folgende explizite Darstellung hat.

$$x_n = 2^{n-1} \cdot 5.$$

(A4) Alternierende Reihe

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} k}{k^2 - \frac{1}{4}} = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}.$$

b) Berechnen Sie mit Hilfe von a) den Grenzwert der Reihe

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} k}{k^2 - \frac{1}{4}}.$$

c) Konvergiert die Reihe absolut?

(A5) Absolute Konvergenz

Bestimmen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren und ob sie absolut konvergieren.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{2^k}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sqrt{k+\frac{1}{k}}}{k}$

(A6) Potenzreihen

Bestimmen Sie den *Konvergenzradius* und das *Konvergenzintervall* (inkl. Randverhalten!) der folgenden Potenzreihen. Hierbei ist $x \in \mathbb{R}$.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x+2)^k, \quad$ mit $a_0 = 0,\ a_k = \dfrac{7k - 22}{k^2(55k + 94)}$ für $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x+6)^k, \quad b_k = \frac{4}{(k+5)!}, \quad$ für $k \in \mathbb{N}$.

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-1)^k, \quad c_k = \frac{k \cdot k!}{k^4 + 3k^2}, \quad$ für $k \in \mathbb{N}$.