Herbst/Winter '24
Prof. J. Krieger
T. Schmid

(A1) Multiple Choice

a) (i) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $|x_{n+1}| < |x_n|$. Dann

- hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. ◯ wahr ◯ falsch
- gilt $\liminf_{n\to\infty} x_n^2 = \limsup_{n\to\infty} x_n^2$. ◯ wahr ◯ falsch

(ii) Alle Teilfolgen einer konvergenten Folge konvergieren.

◯ wahr ◯ falsch

Für eine gegebene Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst eine Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (x_n), wenn $y_k = x_{n_k}$ mit $n_k \in \mathbb{N}$ und $n_k < n_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$.

b) Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen.

- Ist $\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ oder $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

  ◯ wahr ◯ falsch

- Wenn $\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} |y_n| = \infty$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} |x_n + y_n| = \infty$

  ◯ wahr ◯ falsch

- Wenn x_n konvergiert, und $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, wobei $y_n \neq 0$, dann folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$.

  ◯ wahr ◯ falsch

- Wenn $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$, wobei $x_n \neq 0$, dann folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

  ◯ wahr ◯ falsch

c) Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.

◯ wahr ◯ falsch

d) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{\sqrt{n}+1} - \frac{n+1}{\sqrt{n+1}+1} \right)$$

◯ divergiert. ◯ konvergiert gegen $\frac{1}{2}$.

◯ konvergiert gegen $\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{\sqrt{2}+1}$. ◯ konvergiert gegen 0.

e) Sei (x_n) eine Folge, welche gegen 0 konvergiert. Dann folgt: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergiert.

◯ wahr ◯ falsch

f) Seien $(x_n), (y_n)$ zwei Folgen, für welche die Ungleichung $x_n \leq y_n$ gilt. Dann gilt: Falls die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ divergiert, so divergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} y_n$.

◯ wahr ◯ falsch

(A2) Induktionsbeweise

Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion die folgenden Identitäten. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(1) Prüfen Sie, ob die Aussage für $n = 1$ korrekt ist.

(2) Nehmen Sie an, dass die Aussage für ein beliebiges aber nicht näher bestimmtes $n \in \mathbb{N}$ korrekt ist. (*Induktionsannahme*)

(3) Benutzen Sie (2) um zu zeigen, dass die Aussage nun auch für $n+1$ gültig ist. (*Induktionsschluss*)

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!}$$

c) (Bernoulli Ungleichung) Sei $x > -1$. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1+x)^n \geq (1+nx), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

(A3) Rekursive Folgen II

Die Folge (x_n) sei rekursiv definiert durch

$$x_{n+1} = \frac{8}{3}x_n - 6, \quad x_0 = 5.$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu bestimmen, ob diese Folge einen Grenzwert für $n \to \infty$ hat und falls ja, diesen Grenzwert auszurechnen.

a) Bestimme die reelle Zahl, welche als Grenzwert in Frage kommt.

b) Zeige per vollständiger Induktion, dass $x = 5$ eine untere Schranke der Folge ist.

c) Entscheide nun, ob die Folge einen Grenzwert hat oder nicht, und wie dieser eventuell lautet.

(A4) Reihen

Bestimmen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren. Die Berechnung des eventuellen Grenzwertes ist nicht nötig.
Tipp: Das Majorantenkriterium kann hilfreich sein. Sie können das Konvergenzverhalten der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ *mit* $p \geq 0$ *benutzen: Ist* $p \in [0,1]$ *so divergiert die Reihe. Ist dagegen* $p > 1$, *so konvergiert sie.*

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+3}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+4} - \sqrt{n+2}}{n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n^2)}{n^2+3}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+3)}}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^5}}{n^3+1}$