SERIE 3 – Analyse I (Allemand). Abgabe: 23.09.2024

EPFL

Herbst/Winter '24
Prof. J. Krieger
T. Schmid

(A1) Multiple Choice

a) Falls die Folge (y_n) mit $y_n = |x_n|$ konvergiert, dann konvergiert auch (x_n).

○ richtig ○ falsch

b) Betrachten Sie die Folge (x_n) mit $x_n = \frac{n}{(n+1)^2}$. Sei ausserdem die Folge (q_n) durch $q_n = \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$ gegeben. Dann gilt:

○ $\lim_{n\to\infty} q_n < 1$
○ $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$
○ $\lim_{n\to\infty} q_n > 1$
○ (x_n) konvergiert
○ (x_n) divergiert
○ Über die Konvergenz von (x_n) lässt sich nichts sagen.

c) Betrachten Sie die Folge (x_n) mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$. Betrachten Sie $q_n = \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$. Was lässt sich über die Konvergenz von (q_n) aussagen?

○ nichts ○ konv. gegen 0 ○ konv. gegen 1

d) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \in \mathbb{R}$. Wenn $|x_{n+1}| < |x_n|$,

- dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

  ○ wahr ○ falsch

- dann konvergiert $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.

  ○ wahr ○ falsch

e) Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen.

- Wenn $(|x_n| + |y_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann sind (x_n) und (y_n) beschränkt.

  ○ wahr ○ falsch

- Wenn $(|x_n - y_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null konvergiert, dann sind (x_n) und (y_n) konvergent.

  ○ wahr ○ falsch

(A2) Beschränktheit und Grenzwerte

Entscheiden Sie ob die Folge beschränkt ist oder nicht. Geben Sie gegebenenfalls eine obere oder untere Schranke an, sofern eine derartige existiert.

a) $x_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2^n}$ b) $x_n = \dfrac{n^2 + 2}{n + 1}$

Tipp: Falls Folgen Terme der Art $(-1)^n$ enthalten, lohnt es sich die Folgenglieder für n gerade und n ungerade separat zu betrachten.

Entscheiden Sie ob die nachstehenden Folgen einen Grenzwert haben für $n \to \infty$. Falls ja, geben Sie ihn an.

c) $x_n = \dfrac{4^n + (-4)^n}{2^n}$ d) $x_n = -\dfrac{1}{3}\dfrac{15n^3 - 2}{n^3}$

e) $x_n = 2^{1+(-1)^n}$

(A3) Grenzwerte II

Berechnen Sie die Grenzwerte dieser Folgen für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\},\ n \to \infty$:
Für die ersten beiden Folgen benutzen Sie das *Quotientenkriterium:*

a) $x_n = \dfrac{2^n(n+1)}{n!}$

b) $\frac{n^n}{n!}$

Berechnen Sie den Grenzwert der nächsten beiden Folgen mit dem *Kriterium der zwei Polizisten:*

c) $x_n = \dfrac{n+1}{(n+2)^2}$

d) $x_n = \dfrac{1+\sqrt{n}+n}{(1+n)\sqrt{3+n}}$

Nehmen Sie sich für den nächsten Grenzwert die Bernoulli-Ungleichung zu Hilfe.

e) $x_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

Bernoulli-Ungleichung: Es gilt für alle $x > -1$ und jedes $n \in \mathbb{N}$, dass

$$(1+x)^n \geq (1+nx).$$

Diese Ungleichung werden Sie in einer der nächsten Übungen per Induktion nachweisen.

(A4) Rekursive Folgen

Zeigen Sie, dass die folgende rekursiv definierte Folge konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

$$x_0 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = x_n(2 - x_n)$$

Hinweis. Überlegen Sie sich zunächst mögliche Grenzwerte. Zeigen Sie dann dass die Folge durch 1 nach oben beschränkt ist und analysieren Sie das Monotonieverhalten.