Herbst/Winter '24
Prof. J. Krieger
T. Schmid

(A1) Multiple Choice

a) $F(x) = 2x\sin(\sqrt{x})$ ist eine Stammfunktion von

- ◯ $f(x) = 2\cos(\sqrt{x})$
- ◯ $f(x) = 2\cos(\sqrt{x}) - x\sin(\sqrt{x})$.
- ◯ $f(x) = 2\sin(\sqrt{x}) + \sqrt{x}\cos(\sqrt{x})$.
- ◯ $f(x) = 2\sin(\sqrt{x}) - x\cos(\sqrt{x})$.

b) Sei $f \in C^0([0,1])$. Dann gilt für beliebiges ξ in $[0,1]$:

$$\left(\int_\xi^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = \left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = \left(\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x),\ \forall x \in [0,1].$$

◯ richtig ◯ falsch

c) Für jede Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ existiert ein $\xi \in [a,b]$ so dass

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

◯ richtig ◯ falsch

d) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Falls

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

dann besitzt f auf $[a,b]$ eine Nullstelle.

◯ richtig ◯ falsch

e) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Falls F injektiv ist und $F(b) > F(a)$, dann gilt $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$.

◯ richtig ◯ falsch

(A2) Kurvendiskussion

a) Bestimmen Sie das Verhalten der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (1+\cos(x))\sin(x)$$

an den *kritischen Punkten*, das heisst an den Stellen x_0 wofür $f'(x_0) = 0$ gilt. Berechnen Sie dann die *Wendepunkte der Funktion*, das heisst untersuchen Sie die Ableitung auf lokalen Extremstellen.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f :]-1,1[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{\cos x}}{1-x^2}$$

ein lokales Minimum in $x_0 = 0$ besitzt.

c) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^6+x^5+2x^2+x+1}$$

ein lokales Maximum in $x_0 = 0$ besitzt.

(A3) Integration von Potenzreihen

Polynome sind einfach zu integrieren, denn wir wissen, dass $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ eine Stammfunktion von x^n ist. Doch können wir die Stammfunktion einer komplizierten Funktion f berechnen?

(a) Stellen Sie die Funktion

$$f :]-1,1[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x+1},$$

mittel Taylorentwicklung als eine Potenzreihe dar.

(b) Bilden Sie die Stammfunktion von f indem Sie die Potenzreihe integrieren (vergleiche mit der Vorlesung/dem Skript). Betrachten Sie also die Reihe, welche entsteht wenn Sie für jeden einzelnen Term der Summe die Stammfunktion wie oben erläutert bilden.

(A4) Substitutionsregel

Berechnen Sie mit Hilfe der Substitutionsregel

a) $\displaystyle\int \frac{\cos(t)}{(\sin(t)+2)^2}\,\mathrm{d}t$

b) $\displaystyle\int_1^e \frac{2\log(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

c) $\displaystyle\int \frac{g'(t)}{g(t)}\,\mathrm{d}t \quad \text{mit } g(t) \neq 0$

(A5) Partialbruchzerlegung

Berechne mit Hilfe der Partialbruchzerlegung:

a) $\displaystyle\int_4^6 \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1}\,\mathrm{d}x$

Hinweis: Informationen zur Partialbruchzerlegung finden Sie beispielsweise im Theorem 7.14 im Skript sowie in den Beispielen 7.15.

(A6) Uneigentliche Integrale

Konvergieren die folgenden Integrale? Falls ja, geben Sie den Wert des Integrals an.

a) $\displaystyle\int_0^\infty te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

b) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{\log^2(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$

(A7) Grenzwerte von Funktionen 2

Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1+\cos(x-\pi)}{x\sin(x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{\log(\sqrt{x}+1) - \log(\sqrt{x})}$