EPFL

Herbst/Winter '24
Prof. J. Krieger
T. Schmid

(A1) Multiple Choice

a) Die Taylorentwicklung zweiter Ordnung $g(x)$ der Funktion

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$$

an der Stelle $x_0 = 0$ lautet:

- ◯ $g(x) = 1 - 2x - 4x^2 + o(x^2)$.
- ◯ $g(x) = 1 + x + 2x^2 + o(x^2)$.
- ◯ $g(x) = 1 + 2x + 4x^2 + o(x^2)$.
- ◯ $g(x) = f(x)$.

b) Die Taylorentwicklung zweiter Ordnung $g(x)$ der Funktion

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$$

an der Stelle $x_0 = 1$ lautet:

- ◯ $g(x) = 1 + x + 2x^2 + o(x^2)$.
- ◯ $g(x) = 1 + (x-1) + 2(x-1)^2 + o(x^2)$.
- ◯ $g(x) = 5 + 8(x-1) + 5(x-1)^2 + o((x-1)^2)$.
- ◯ $g(x) = 5 + 8(x-1) + 5(x-1)^2 + o(x^2)$.

c) Die Taylorentwicklung fünfter Ordnung $g(x)$ der Funktion $f(x) = \sin(x)$ an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ist gegeben durch:

- ◯ $g(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^5 + o(x^5)$
- ◯ $g(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5\right)$
- ◯ $g(x) = \left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{6}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^5 + o\left(\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^5\right)$
- ◯ $g(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5\right)$

d) Betrachten Sie das Taylor-Polynom p_3 dritter Ordnung der Funktion $f(x) = \cos(x)$ um die Stelle $x_0 = 0$. Für welches Intervall $[-a, a] \subset \mathbb{R}$ gilt sicher

$$|f(x) - p_3(x)| < 10^{-2}$$

für alle $x \in [-a, a]$?

- ◯ $a = 0.6$
- ◯ $a = 1$
- ◯ $a = 2.2$
- ◯ $a = \frac{\pi}{2}$

e) Sei $f \in C^3(]0,1[)$. Für $x_0 \in]0,1[$ gelte:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = 0.$$

Dann

- ◯ hat f ein lokales Minimum in x_0.
- ◯ besitzt f kein lokales Extremum in x_0.
- ◯ hat f ein lokales Maximum in x_0.
- ◯ ist keine allgemein gültige Aussage möglich.

(A2) Stetige Differenzierbarkeit

a) Zeigen Sie, dass die Funktion f ist stetig und differenzierbar, aber nicht *stetig differenzierbar* ist

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \sqrt[3]{x^4} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Stetig differenzierbar bedeutet, dass die Ableitung der Funktion f ebenfalls stetig ist.

(A3) Klausuraufgabe von 2012

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so dass die folgende Funktion für $x \in [0,2]$ stetig ist

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^x - x}{1 - x + \log(x)} & \text{für } \; x \in]1,2], \\ a & \text{für } \; x \in [0,1]. \end{cases}$$

Nutzen sie dazu die Regel von L'Hôpital.

(A4) Unendlich oft differenzierbare Funktion

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{x^2}$$

unendlich oft differenzierbar ist, und dass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Polynom p_n vom Grad n existiert so dass

$$f^{(n)} = p_n(x) \cdot f(x) \; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Der Grad eines Polynoms ist definiert als der grösste Exponent in dessen Standarddarstellung als Summe von Monomen. So ist der Grad des folgenden Polynoms gleich 7.

$$12x^7 - 23x^5 + 3x^4 - 6x^2 + 9x + 3.$$

Hinweis: Erste Schritte rechnen und dann vollständige Induktion.

(A5) Taylorentwicklung

Die Taylorentwicklung von Ordnung 5 von $\tan(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ ist gegeben durch

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

a) Berechnen Sie die Taylorentwicklung von Ordnung 5 von $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{4}$. *Hinweis: Substituieren von $y = x - \frac{\pi}{4}$ kann hier helfen.*

b) Berechnen Sie die Taylorentwicklung von Ordnung 3 von $\tan(x)$ an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{4}$. Benutzen Sie $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

c) Zeigen Sie mit der Taylorentwicklung von Ordnung 1 von $\tan(x)$ an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{4}$, dass gilt

$$|\tan(x) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)| \leq \frac{\tan(\frac{5\pi}{16})}{\cos^2(\frac{5\pi}{16})} \cdot \left(\frac{\pi}{16}\right)^2, \quad x \in]\frac{3\pi}{16}, \frac{5\pi}{16}[$$

(A6) Grenzwerte von Funktionen 1

(a) Berechnen Sie folgende Grenzwerte. Benutzen Sie dazu Taylorentwicklung oder L'Hôpital.

i) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{\sin 5x} - \frac{1}{5}\right)$

ii) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^2 \sin^2(x)}$

iii) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^4 \tan(x^2) - x^4 \sin^2(x)}{1 - \cos(x^4)}$

(b) Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 \log(\cosh(x))}{(\log(1 + x^2))^2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log(1 + x^2)}{\sinh^2(x)}$