Herbst/Winter '24
Prof. J. Krieger
T. Schmid

(A1) Multiple Choice

a) Sei $f(x) = \frac{\cos(x)x - \sin(x)}{x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$ und $x \neq 0$, sowie $f(0) = 0$. Dann gilt:

- ◯ f ist in $x = 0$ stetig aber nicht differenzierbar
- ◯ f ist in $x = 0$ differenzierbar und $f'(0) = -\frac{1}{3}$
- ◯ f ist in $x = 0$ differenzierbar und $f'(0) = 0$
- ◯ f ist in $x = 0$ rechtsseitig aber nicht linksseitig differenzierbar.

b) Es gibt eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die im Punkt $x = 0$ differenzierbar ist aber so, dass es unendlich viele Punkte $x_n \in \mathbb{R}$ gibt mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ und f ist in x_n nicht differenzierbar,

- ◯ wahr
- ◯ falsch

Tipp: Gegeben sei $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ und $x_n = \frac{1}{n}$. Schauen Sie sich die Funktion an, die entsteht wenn $g(x)$ auf dem Interval $(x_{n+1}, x_n]$ jeweils durch die Gerade ersetzt wird, die die Punkte $(x_n, g(x_n))$ und $(x_{n+1}, g(x_{n+1}))$ des Graphen von g verbindet.

(A2) Zwischenwertsatz

a) Sei $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(4)$. Zeigen Sie, dass ein $\alpha \in [0, 2]$ existiert, so dass

$$f(\alpha) = f(\alpha + 2).$$

Tipp: Betrachten Sie $g(x) = f(x + 2) - f(x)$.

b) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass $f(x)^2 = 1$ für alle $x \in I$. Zeigen Sie, dass entweder $f(x) = 1$ für alle $x \in I$ oder $f(x) = -1$ für alle $x \in I$.

c) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\frac{1}{1+x^2} = \sqrt{x}$ in den positiven reellen Zahlen $\mathbb{R}^*_+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$ eine Lösung hat.

(A3) Nullstellen

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) - e^{-x} \end{cases}$$

im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ eine Nullstelle hat.

b) Erläutern Sie, wieso die Funktion in diesem Intervall genau eine Nullstelle hat.

(A4) Ableitungen

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden vier Funktionen, welche wir auf dem Definitionsbereich $E = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$ betrachten. Benutzen Sie dazu die aus der Vorlesung bekannten Regeln (Theorem 6.3 im Skript).

a) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

b) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{2 + \sin(\mathrm{Log}(x))}$

c) $f(x) = x^{\sin(x)}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^{3/5} + \sin^3\left(\frac{1}{x}\right)}$

Bestimmen Sie ausserdem die hundertste Ableitung von

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 e^x.$$

Leiten Sie dazu die Funktion mehrmals ab, bis ein Schema erkennbar wird. Schliessen Sie davon auf eine allgemeine Formel für die n-te Ableitung von f. Beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion. Setzen Sie dann $n = 100$ ein.

(A5) Ableitungen: Differenzenquotient

In der Definition der Ableitung aus der Vorlesung (Definition 6.1 im Skript) fordert man die Konvergenz des *Differenzenquotienten*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

und der Grenzwert entspricht $f'(x_0)$. Die *rechts-* bzw. *linksseitige Ableitung* (Definition 6.6 im Skript) ist gegeben durch den rechts/-linksseitigen Grenzwert des Differenzenquotienten.

a) Berechnen Sie für folgende Funktionen $f : E \to \mathbb{R}$ die Ableitung an der Stelle $x_0 \in A \subseteq E$, indem Sie direkt die Konvergenz des Differenzenquotienten prüfen und *keine* bekannten Ableitungen oder Ableitungsregeln verwenden.

   (i) $f(x) = x\cos(x), \quad E = \mathbb{R}.$

   (ii) $f(x) = \sqrt{x}, \quad E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

   Tipp: Das Additionstheorem für den Cosinus

   $$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

   kann Ihnen in (i) helfen.

b) Zeigen Sie nun mit Hilfe der rechts/-linksseitigen Konvergenz des Differenzenquotienten gegen die rechts/-linksseitige Ableitung, dass die Funktion

   $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 1 \\ -x(x-3) & x \geq 1 \end{cases}$$

   an der Stelle $x_0 = 1$ nicht differenzierbar ist.

(A6) Ableitung der Umkehrfunktion

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

   $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 + 2x - 3$$

   bijektiv ist. Berechnen Sie dann $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

b) Berechnen Sie $\left(f^{-1}\right)'(\pi/2)$ für

   $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \arccos(x).$$