Herbst/Winter '24

Prof. J. Krieger
T. Schmid

(A1) Multiple Choice

a) Die erste Aussage ist falsch und ein Gegenbeispiel ist gegeben durch:

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die zweite Aussage ist ebenfalls falsch. Gilt $\lim_{n\to\infty} q_n < 1$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ absolut nach dem Quotientenkriterium. Ist aber $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$, so gibt es sowohl Beispiele für Konvergenz, etwa $x_n = \frac{1}{n^2}$, als auch Divergenz, etwa $x_n = \frac{1}{n}$.

b) richtig. Wenn $R = 0$ konvergiert die Potenzreihe lediglich für $x = x_0$, wie zum Beispiel für $\sum_{k=0}^{\infty} k!(x - x_0)^k$.

c) richtig. Da nun gilt $(x - x_0)^k = 0$ falls $k > 0$.

d) Der Konvergenzradius besagt, dass die originale Potenzreihe für x innerhalb des Intervalls $]\pi - 2, \pi + 2[$ konvergiert, bzw. wenn die Werte innerhalb der Klammer mit der Potenz zwischen -2 und 2 liegen. Die Konvergenz in den Randpunkten $x = \pi - 2, x = \pi + 2$ kann sowohl war als auch falsch sein. Nur in der letzten Aussage ligen alle x im Konvergenzinterval, da

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-3)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\underbrace{(x+\pi-3)}_{=y}-\pi)^k,\ \forall x \in]2,3] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k(y-\pi)^k,\ \forall y \in]\pi-1,\pi] \subset]\pi-2,\pi+2[.\end{aligned}$$

In allen anderen Fällen ist die Konvergenz dagegen nicht garantiert, da der Konvergenzradius alleine keine Aussagen über den Rand ermöglicht.

(A2) Grenzwerte mittels Partialbruchzerlegung

a) Finden Sie A und B, so dass

$$\frac{1}{k(k+4)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+4}, \quad \forall k > 0.$$

Dies ist eine sogenannte Partialbruchzerlegung.

Wir haben

$$\frac{A}{k} + \frac{B}{k+4} = \frac{(k+4)A + kB}{k(k+4)} = \frac{k(A+B) + 4A}{k(k+4)} \stackrel{!}{=} \frac{1}{k(k+4)}.$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}&k(A+B) + 4A = 1, \\ &\Rightarrow A + B = 0 \text{ und } 4A = 1.\end{aligned}$$

Dies führt zu $A = \frac{1}{4}$ und $B = -\frac{1}{4}$.
Somit ergibt sich

$$\frac{1}{k(k+4)} = \frac{1}{4k} - \frac{1}{4(k+4)}, \quad \forall k > 0.$$

b) Berechnen Sie mit Hilfe von (a) den Wert für $n \geq 5$ der Summe $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+4)}$.

Mit Hilfe von (a) haben wir für $n \geq 5$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+4)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k} - \frac{1}{4(k+4)} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+4} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=5}^{n+4} \frac{1}{k} \right) \\
&\overset{*}{=} \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{n+4} \frac{1}{k} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) \\
&= \frac{25}{48} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} \right).
\end{aligned}$$

Das Gleichheit an der Stelle $*$ ergibt sich dadurch, dass die Terme von $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{n}$ in der linken Summe von den Termen $-\frac{1}{5}$ bis $-\frac{1}{n}$ der rechten Summe gelöscht werden. Übrig bleibt also in der linken Summe $\frac{1}{1}$ bis $\frac{1}{4}$ und in der rechten Summe $-\frac{1}{n+1}$ bis $-\frac{1}{n+4}$.

c) Berechnen Sie mit Hilfe von (b) den Grenzwert $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+4)}$.

Benutzen wir (b), so gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+4)} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+4)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{25}{48} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} \right) \right) \\
&= \frac{25}{48}.
\end{aligned}$$

(A3) Induktionsbeweise II

Die Folge (x_n) sei rekursiv definiert durch

$$x_1 = 5, \quad x_{n+1} = 2x_n.$$

Beweisen Sie, dass die Folge explizit gegeben ist durch

$$x_n = 2^{n-1} \cdot 5$$

Induktionsverankerung Laut expliziter Berechnung ist

$$x_1 = 2^{1-1} \cdot 5 = 2^0 \cdot 5 = 5,$$

was mit der rekursiven Darstellung übereinstimmt.

Induktionsschritt Wir nehmen an, dass die explizite Darstellung korrekt ist für ein $n \geq 1$, d.h. $x_n = 2^{n-1} \cdot 5$ ist wahr. Es gilt zu zeigen, dass die explizite Darstellung von x_{n+1} mit der rekursiven Darstellung übereinstimmt. Es gilt

$$x_{n+1} = 2x_n = 2 \cdot (2^{n-1} \cdot 5) = 2^n \cdot 5.$$

Somit ist die Aussage wahr für $n + 1$.

(A4) Alternierende Reihe

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} k}{k^2 - \frac{1}{4}} = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}.$$

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion.
Induktionsverankerung: $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k+1}k}{k^2 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{(-1)^2}{2+1}.$$

Induktionsschritt: $n \to (n+1)$
Wir wollen zeigen, dass

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}k}{k^2 - \frac{1}{4}} = 1 + \frac{(-1)^{n+2}}{(2(n+1)+1)}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}k}{k^2 - \frac{1}{4}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}k}{k^2 - \frac{1}{4}} + \frac{(-1)^{n+2}(n+1)}{(n+1)^2 - \frac{1}{4}} \\
&\overset{(IV)}{=} 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{n+2}(n+1)}{n^2 + 2n + \frac{3}{4}} \\
&= 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{n+2}4(n+1)}{4n^2 + 8n + 3} \\
&= 1 - \frac{(-1)^{n+2}}{(2n+1)} + \frac{(-1)^{n+2}4(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= 1 - \frac{(-1)^{n+2}(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{(-1)^{n+2}4(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= 1 + \frac{(-1)^{n+2}(-(2n+3) + 4(n+1))}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= 1 + \frac{(-1)^{n+2}(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= 1 + \frac{(-1)^{n+2}}{(2n+3)} = 1 + \frac{(-1)^{n+2}}{(2(n+1)+1)}.
\end{aligned}$$

b) Berechnen Sie mit Hilfe von a) den Grenzwert der Reihe

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}k}{k^2 - \frac{1}{4}}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}k}{k^2 - \frac{1}{4}} &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\right) \\
&= 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = 1,
\end{aligned}$$

da die Folge (a_n) mit

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = \begin{cases} -\frac{1}{2n+1} & \text{für } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{2n+1} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

gegen 0 konvergiert.

c) Konvergiert die Reihe absolut?
Die Reihe konvergiert nicht absolut. Wir sehen dies mit dem Majorantenkriterium, welches wir auf die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left|\frac{(-1)^{k+1}k}{k^2 - \frac{1}{4}}\right|}_{y_k}$ anwenden. Wir suchen eine Folge (x_k) mit

$$0 \leq |x_k| \leq y_k,$$

für welche die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ divergiert. Aus der Divergenz dieser Reihe folgt dann die Divergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$. Es gilt

$$y_k = \left|\frac{(-1)^{k+1}k}{k^2 - \frac{1}{4}}\right| = \frac{k}{k^2 - \frac{1}{4}} \geq \frac{k}{k^2} = \underbrace{\frac{1}{k}}_{x_k}.$$

Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, und damit divergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}k}{k^2 - \frac{1}{4}} \right|$.

(A5) Absolute Konvergenz

Bestimmen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren und ob sie absolut konvergieren.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{2^k}$
Wir benutzen das Leibniz-Kriterium (Theorem 3.8). Die Eigenschaften i) ist erfüllt, da $\frac{k}{2^k} > 0$ für alle k. Da $\frac{k}{2^k} \to 0$ ist Eigenschaft iii) erfüllt. Eigenschaft ii) ist erfüllt, da

$$\frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} = \frac{2^k k + 1}{2^{k+1} k} = \frac{1}{2} \frac{k+1}{k} \to \frac{1}{2} < 1.$$

Damit konvergiert die Reihe. Sie konvergiert auch absolut, da für $\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^{k+1} \frac{k}{2^k}|$ das Quotientenkiterium erfüllt ist:

$$\frac{2^k k + 1}{2^{k+1} k} = \frac{1}{2} \frac{k+1}{k} \to \frac{1}{2} < 1.$$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sqrt{k + \frac{1}{k}}}{k}$
Wir benutzen erneut das Leibniz-Kriterium. Die Eigenschaft i) ist erfüllt, da $\frac{\sqrt{k+\frac{1}{k}}}{k} > 0$ für alle k. Da $\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k+\frac{1}{k}}}{k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{k^2+1}{k^3}} = 0$, ist Eigenschaft iii) erfüllt. Eigenschaft ii) gilt, da

$$\frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} = \sqrt{\frac{(k+1+\frac{1}{k+1})k^2}{(k+1)^2(k+\frac{1}{k})}} \leq \sqrt{\frac{(k+2)k}{(k+1)^2}} = \sqrt{\frac{k^2+2k}{k^2+2k+1}} < 1.$$

Damit konvergiet die Reihe. Das Quotientenkriterium lässt sich jedoch nicht anwenden. Es gilt $|x_k| > \frac{1}{\sqrt{k}}$. Damit divergiert nach Theorem 3.4 die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$, d.h. die Reihe konvergiert nicht absolut.

(A6) Potenzreihen

Bestimmen Sie den *Konvergenzradius* und das *Konvergenzintervall* (inkl. Randverhalten!) der folgenden Potenzreihen. Hierbei ist $x \in \mathbb{R}$.

Laut Theorem 3.15 können wir den Konvergenzradius einer Potenzreihe wie folgt berechen. Gegeben sei eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ mit $a_k \neq 0$ für genügend grosse k. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = q_\infty,$$

dann ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $R = \frac{1}{q_\infty}$.

a) $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x+2)^k, \quad \text{mit } a_0 = 0,\ a_k = \frac{7k - 22}{k^2(55k+94)} \text{ für } k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}.$$

Es gilt

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{385k^4 - 167k^3 - 1410k^2}{385k^4 + 603k^3 - 3227k^2 - 6723k - 3278}.$$

Daher ist

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{385k^4 - 167k^3 - 1410k^2}{385k^4 + 603k^3 - 3227k^2 - 6723k - 3278} = 1.$$

Der Konvergenzradius R der dazugehörigen Potenzreihe ist somit gegeben durch den Kehrwert des Grenzwertes, also

$$R = \frac{1}{1} = 1.$$

Die Potenzreihe konvergiert absolut für alle $x \in]x_0 - R, x_0 + R[=]-2-1, -2+1[=]-3,-1[$. Es gilt noch die Randpunkte $x=-1$ und $x=-3$ zu betrachten. In diesen Punkten ist die Potenzreihe definiert durch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(-1+2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{a_k \cdot 1^k}_{x_k}$ respektive $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{a_k(-1)^k}_{\tilde{x}_k}$. Wir zeigen mittels des Majorantenkriteriums, dass beide Reihen konvergieren. Betrachte dazu $|x_k|$ bzw. $|\tilde{x}_k|$. In beiden Fällen erhalten wir $|a_k|$. Es gilt

$$|a_k| = \left| \frac{7k-22}{55k^3+94k^2} \right| \leq \frac{7k}{55k^3+94k^2} \leq \frac{7k}{55k^3} = \frac{7}{55}\frac{1}{k^2},$$

dh. wir haben eine konvergente Majorante gefunden.
Somit ist der Konvergenzradius $[-3,-1]$.

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x+6)^k, \quad b_k = \frac{4}{(k+5)!}, \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$

Es gilt

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{1}{k+6}.$$

Daher ist

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{b_{k+1}}{b_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+6} = 0.$$

Der Konvergenzradizus R der dazugehörigen Potenzreihe ist somit gegeben

$$R = \infty.$$

Die Potenzreihe konvergiert überall absolut.

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-1)^k, \quad c_k = \frac{k \cdot k!}{k^4+3k^2}, \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$

Es gilt

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{\frac{(k+1)(k+1)!}{(k+1)^4+3(k+1)^2}}{\frac{k \cdot k!}{k^4+3k^2}} = \frac{k^3+3k}{k^2+2k+4}.$$

Daher ist

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k^3+3k}{k^2+2k+4} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2(k+3k^{-1})}{k^2(1+2k^{-1}+4k^{-2})} = \infty.$$

Der Konvergenzradius R der dazugehörigen Potenzreihe ist daher gegeben durch

$$R = 0.$$

Die Potenzreihe konvergiert also nur für $x_0 = 1$ und divergiert sonst.