MUSTERLÖSUNG 12 – Analyse I (Allemand)

Herbst/Winter '24
Prof. J. Krieger
T. Schmid

(A1) Multiple Choice

a) $g(x) = 1 + x + 2x^2 + o(x^2)$. (Durch Rechnung, siehe b))

b) $g(x) = 5 + 8(x-1) + 5(x-1)^2 + o((x-1)^2)$. Rechnung:

$$f(1) = 5$$
$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 1, \quad f'(1) = 8$$
$$f''(x) = 6x + 4, \quad f''(1) = 10$$

c) $g(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5\right)$. Rechnung:

$$f^{(1)}(x) = \cos(x), \quad f^{(2)}(x) = -\sin(x), \quad f^{(3)}(x) = -\cos(x)$$
$$f^{(4)}(x) = \sin(x), \quad f^{(2)}(x) = \cos(x), \quad \cos(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$$

d) a=0.6. Aus der Vorlesung wissen wir

$$|f(x) - p_3(x)| \leq \frac{|x-0|^{3+1}}{(3+1)!}\max_{\xi\in[-a,a]}|f^{(3+1)}(\xi)| = \frac{x^4}{24}.$$

Auflösen von $\frac{x^4}{24} < 10^{-2}$ nach x gibt die Lösung.

e) es ist keine Aussage möglich, vergleiche z.B. $f_1(x) = (x - \frac{1}{2})^3$, $f_2(x) = f(x), f_3(x) = -f_2(x)$ wobei $f(x) = (x - \frac{1}{2})^4$.

(A2) Stetige Differenzierbarkeit

Zeigen Sie, dass die Funktion f ist stetig und differenzierbar, aber nicht *stetig differenzierbar* ist

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^{\frac{4}{3}} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Die Funktion f ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar (und damit auch stetig). In den Punkten $x \neq 0$ ist $f(x)$ gegeben durch $x^{\frac{4}{3}} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, was klar differenzierbar ist mit den üblichen Rechenregeln. Der Punkt $x = 0$ muss genauer untersucht werden. f ist in $x = 0$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

existiert. Es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\frac{4}{3}} \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Somit ist die Ableitung $f'(x)$ gegeben durch

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Die Funktion f' ist nun aber nicht mehr stetig im Punkt 0. Der erste Summand konvergiert gegen 0 für $x \to 0$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Der zweite Summand besitzt aber keinen Grenzwert an der Stelle $x = 0$. Wir können zwei Folgen

$$a_n = \frac{1}{2\pi n - \pi/2}\,, \qquad b_n = \frac{1}{2\pi n + \pi/2}$$

konstruieren, für die gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Aber es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{a_n^2}} \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2\pi n-\pi/2}\right)^2}} \sin\left(2\pi n - \pi/2\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2\pi n-\pi/2}\right)^2}} \to -\infty.\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{b_n^2}} \sin\left(\frac{1}{b_n}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2\pi n+\pi/2}\right)^2}} \sin\left(2\pi n + \pi/2\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2\pi n+\pi/2}\right)^2}} \to \infty.\end{aligned}$$

(A3) Klausuraufgabe von 2012

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so dass die folgende Funktion für $x \in [0, 2]$ stetig ist

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^x - x}{1-x+\log(x)} & \text{für } x \in]1, 2], \\ a & \text{für } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Nutzen sie dazu die Regel von L'Hôpital.

Damit f eine stetige Fuktion auf $[0, 2]$ ist, muss gelten, dass $\lim_{x\to 1^+} f(x) = a$ Wir haben

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{e^{x\log(x)} - x}{1 - x + \log(x)}$$

und können die Regel von L'Hôpital anwenden. Damit erhalten wir

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{e^{x\log(x)} - x}{1 - x + \log(x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{e^{x\log(x)}(\log(x) + 1) - 1}{-1 + \frac{1}{x}}.$$

Wir können die Regel von L'Hôpital erneut anwenden

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{e^{x\log(x)}(\log(x) + 1) - 1}{-1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{e^{x\log(x)}(\log(x) + 1)^2 - \frac{1}{x}e^{x\log(x)}}{-\frac{1}{x^2}} = -2.$$

Somit müssen wir $a = -2$ wählen.

(A4) Unendlich oft differenzierbare Funktion

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{x^2} \end{array}$$

unendlich oft differenzierbar ist, und dass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Polynom p_n vom Grad n existiert so dass

$$f^{(n)} = p_n(x) \cdot f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Wir beweisen die Aussage mittels Induktion.

Induktionsverankerung Die Funktion f ist differenzierbar. Ihre erste Ableitung ist mittels der Kettenregel

$$f'(x) = \underbrace{2x}_{=:p_1} e^{x^2}$$

wobei p_1 ein Polynom vom Grad 1 ist.

Induktionsschritt Wir nehmen an, dass f n-mal differenzierbar ist, mit

$$f^{(n)} = p_n(x) \cdot f(x),$$

wobei p_n ein Polynom vom Grad n ist. Es gilt, dass sowohl das Polynom p_n, wie auch die Funktion f differenzierbar ist, und damit auch ihr Produkt. Für die $(n+1)$-te Ableitung gilt

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) = (p_n(x) \cdot f(x))' = p_n'(x) \cdot f(x) + p_n(x) \cdot f'(x) \\ &= p_n'(x) \cdot e^{x^2} + p_n(x) \cdot 2xe^{x^2} = e^{x^2} \underbrace{(p_n'(x) + 2xp_n(x))}_{=:p_{n+1}}. \end{aligned}$$

Das Polynom p_{n+1} hat den Grad $n+1$.

(A5) Taylorentwicklung

Die Taylorentwicklung von Ordnung 5 von $\tan(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ ist gegeben durch

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

a) Berechnen Sie die Taylorentwicklung von Ordnung 5 von $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

   Wir substituieren $y = x - \frac{\pi}{4}$. Die Taylorentwicklung von

   $$\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ an der Stelle } x_0 = \frac{\pi}{4}$$

   entspricht der Taylorentwicklung von

   $$\tan(y) \text{ an der Stelle } y_0 = x_0 - \frac{\pi}{4} = 0.$$

   Diese Taylorentwicklung kennen wir aus der Aufgabenstellung. Sie ist gegeben durch

   $$\tan(y) = y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{2}{15}y^5 + o(y^5).$$

   Durch Rücksubstitution erhalten wir

   $$\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{2}{15}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5\right).$$

b) Berechnen Sie die Taylorentwicklung von Ordnung 3 von $\tan(x)$ an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

   Hier können wir nicht einfach substituieren. Wir erhalten durch explizites Ausrechnen der Ableitungen mit den Ableitungsregeln

   $$\begin{aligned} &\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad \tan''(x) = -2\frac{1}{\cos^3(x)}(-\sin(x)) = 2\tan(x) \cdot \tan'(x), \\ &\tan'''(x) = 2(\tan'(x)) + 2\tan(x) \cdot \tan''(x) = \frac{2}{\cos^4(x)} + 4\tan^2(x) \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}. \end{aligned}$$

Damit folgt mit dem Satz von Taylor

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tan'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\tan''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 \\
&+ \frac{\tan'''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{6}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right) \\
&= \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^3\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 \\
&+ \frac{\frac{2+4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^4\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{6}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right) \\
&= 1 + 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)
\end{aligned}$$

c) Mit dem Satz von Taylor und $\tan'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$ gilt

$$\tan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Weiter können wir das $o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ schreiben als

$$\tan''(\xi)\cdot\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2,$$

wobei ξ ein zwischenstelle zwischen $x_0 = \frac{\pi}{4}$ und x ist. Wir müssen daher das Maximum ausrechen

$$\max_{z\in[\frac{3\pi}{16},\frac{5\pi}{16}]}\tan''(z) = \max_{z\in[\frac{3\pi}{16},\frac{5\pi}{16}]}(2\frac{\tan(z)}{\cos^2(z)}) = 2\frac{\tan(\frac{5\pi}{16})}{\cos^2(\frac{5\pi}{16})},$$

das $\tan(x)$ strikt monoton wächst und $\cos^2(x)$ strikt monoton fällt. Also

$$|\tan(x) - p_2(x)| \leq \frac{\tan(\frac{5\pi}{16})}{\cos^2(\frac{5\pi}{16})}\left(\frac{\pi}{16}\right)^2, \quad x\in]\frac{3\pi}{16},\frac{5\pi}{16}[$$

(A6) Grenzwerte von Funktionen 1

(a) Berechnen Sie folgende Grenzwerte. Benutzen Sie Taylorentwicklung oder L'Hôpital.

i) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{\sin 5x} - \frac{1}{5}\right)$

Wir berechnen die Taylorentwicklung von $\sin(x)$ und $\sin(5x)$ von Ordnung 3 um den Punkt $x_0 = 0$,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

und

$$\sin(5x) = 5x - \frac{(5x)^3}{6} + \underbrace{o((5x)^3)}_{=o(x^3)}$$

(Variablelsubstitution $y = 5x$ bei Taylorentwicklung von $\sin(y)$).

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{\sin 5x}-\frac{1}{5}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{5\sin x-\sin 5x}{5x^2\sin 5x} \text{ Taylorentwicklungen einsetzen}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{5\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)-\left(5x-\frac{125}{6}x^3\right)+o(x^3)}{5x^2(5x+o(x))}\\
&\overset{*}{=} \lim_{x\to 0}\frac{20x^3+o(x^3)}{25x^3+o(x^3)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^3(20+\frac{o(x^3)}{x^3})}{x^3(25+\frac{o(x^3)}{x^3})}\\
&=\frac{20+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3}}{25+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3}}=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}.
\end{aligned}
$$

An der Stelle * haben wir verwendet, dass $x^2 o(x) = o(x^3)$ gilt. Aufgrund der Definition ist $r(x) = o(x)$, wenn $\frac{r(x)}{x} \to 0$ für $x \to 0$. Wenn wir nun Zähler und Nenner mit x^2 multiplizieren, so gilt $\frac{x^2 r(x)}{x^3} \to 0$ für $x \to 0$, und somit ist $x^2 r(x)$ gleich $o(x^3)$.

ii) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2(x)}{x^2\sin^2(x)}$

Wir betrachten die Taylorentwicklung von $\sin(x)$ vom Grad 3 um den Punkt $x_0 = 0$,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Durch Quadrieren erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\sin^2(x) &= (x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))\\
&= x^2-\frac{1}{6}x^4+xo(x^3)-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{36}x^6-\frac{1}{6}x^3o(x^3)\\
&+xo(x^3)-\frac{1}{6}x^3o(x^3)+o(x^3)o(x^3)\\
&= x^2-\frac{1}{3}x^4+r(x),
\end{aligned}
$$

wobei $r(x) = xo(x^3) + \frac{1}{36}x^6 - \frac{1}{6}x^3o(x^3) + xo(x^3) - \frac{1}{6}x^3o(x^3) + o(x^3)o(x^3)$. Die Terme von $r(x)$ sind in der Landau Notation

- $xo(x^3) = o(x^4)$
- $\frac{1}{36}x^6 = o(x^5)$
- $\frac{1}{6}x^3o(x^3) = o(x^6)$
- $o(x^3)o(x^3) = o(x^6)$.

Für den letzten Term haben wir die Tatsache aus den Multiple Choice Fragen verwendet, dass wenn $f(x) = o(x^p)$ und $g(x) = o(x^q)$, dann ist $f(x)g(x) = o(x^{p+q})$.

Die Summe $r(x)$ ist dann gleich $o(x^4)$, was der tiefsten Potenz entspricht (wieder Multiple Choice Frage).

Somit ist

$$\sin^2(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2(x)}{x^2\sin^2(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2-(x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4))}{x^2(x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4))}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^4+o(x^4)}{x^4-\frac{1}{3}x^6+o(x^4)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^4(\frac{1}{3}+\frac{o(x^4)}{x^4})}{x^4(1+\frac{o(x^4)}{x^4})}\\
&= \frac{\frac{1}{3}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^4)}{x^4}}{1+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^4)}{x^4}} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

iii) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^4\tan(x^2)-x^4\sin^2(x)}{1-\cos(x^4)}$

Die Taylorentwicklung von $\tan(y)$ von Ordnung 2 ist

$$\tan(y) = y + o(y^2).$$

Durch Substitution $y = x^2$ erhalten wir die Taylorentwicklung von $\tan(x^2)$,

$$\tan(x^2) = x^2 + o(x^4).$$

Die Taylorentwicklung von $\sin^2(x)$ von Ordnung 4 ist mit Aufgabe b),

$$\sin^2(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4).$$

Die Taylorentwicklung von $\cos(y)$ von Ordnung 2 ist

$$\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^2).$$

Durch Substitution $y = x^4$ erhalten wir die Taylorentwicklung von $\cos(x^4)$,

$$\cos(x^4) = 1 - \frac{x^8}{2} + o(x^8).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x^4\tan(x^2)-x^4\sin^2(x)}{1-\cos(x^4)} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^4(x^2+o(x^4))-x^4(x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4))}{1-(1-\frac{1}{2}x^8+o(x^8))}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^4o(x^4)+\frac{1}{3}x^8+x^4o(x^4)}{\frac{1}{2}x^8+o(x^8)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^8+o(x^8)}{\frac{1}{2}x^8+o(x^8)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^8(\frac{1}{3}+\frac{o(x^8)}{x^8})}{x^8(\frac{1}{2}+\frac{o(x^8)}{x^8})}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^8)}{x^8}}{\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^8)}{x^8}} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

(b) Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

i) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2\log\cosh(x)}{(\log(1+x^2))^2}$

Wir betrachten zuerst den Nenner. Die Taylorentwicklung des Cosinus hyperbolicus an der Stelle 0 von Ordnung 4 ist

$$\begin{aligned}
\cosh(x) &= \cosh(0) + \underbrace{\cosh'(0)}_{=\sinh(0)} x + \underbrace{\frac{\cosh''(0)}{2}}_{=\frac{\cosh(0)}{2}} x^2 + \underbrace{\frac{\cosh'''(0)}{6}}_{=\frac{\sinh(0)}{6}} x^3 + \underbrace{\frac{\cosh''''(0)}{24}}_{\frac{\cosh(0)}{24}} x^4 + o(x^4) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x^2 + O(x^4).
\end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung von $\log(1+y)$ ist aus dem Skript bekannt,

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2) = y + O(y^2)$$

Zusammen erhalten wir für den Zähler

$$\begin{aligned}
x^2 \log(\cosh(x)) &= x^2 \log\left(1 + \underbrace{\frac{x^2}{2} + O(x^4)}_{=:y}\right) = x^2 \left(y + O(y^2)\right) \\
&= x^2 \left(\frac{x^2}{2} + O(x^4) + O\left(\left(\frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)^2\right)\right) \\
&= x^2 \left(\frac{x^2}{2} + O(x^4)\right) = \frac{x^4}{2} + O(x^6).
\end{aligned}$$

Für den Nenner verwenden wir erneut die Taylorentwicklung von $\log(1+z)$. Damit gilt

$$\log(1+\underbrace{x^2}_{=:z}) = \log(1+z) = z + O(z^2) = x^2 + O((x^2)^2) = x^2 + O(x^4).$$

Quadrieren ergibt

$$(\log(1+x^2))^2 = (x^2 + O(x^4))^2 = x^4 + O(x^6).$$

Zusammengesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \log\cosh(x)}{(\log(1+x^2))^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{2} + O(x^6)}{x^4 + O(x^6)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4(\frac{1}{2} + \frac{O(x^6)}{x^4})}{x^4(1 + \frac{O(x^6)}{x^4})} \\
&= \frac{\frac{1}{2} + \lim_{x\to 0} \frac{O(x^6)}{x^4}}{1 + \lim_{x\to 0} \frac{O(x^6)}{x^4}} \overset{*}{=} \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

An der Stelle $*$ bemerken wir, dass $\frac{O(x^6)}{x^4} = \frac{O(x^6)x^2}{x^6} = \frac{O(x^6)}{x^6}x^2$ und da $\frac{O(x^6)}{x^6}$ beschränkt ist konvergiert der Ausdruck $\frac{O(x^6)}{x^6}x^2$ gegen 0 für x gegen 0.

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x^2)}{\sinh^2(x)}$

Wir gehen wie im Teil i) vor. Es gilt

$$\log(1+x^2) = x^2 + O(x^4)$$

und die Taylorentwicklung von sinh von Ordnung 3 um die Stelle 0 führt zu

$$\begin{aligned}
\sinh(x) &= \sinh(0) + \underbrace{\sinh'(0)}_{\cosh(0)} x + \underbrace{\frac{\sinh''(0)}{2}}_{=\frac{\sinh(0)}{2}} x^2 + \underbrace{\frac{\sinh'''(0)}{6}}_{\frac{\cosh(0)}{6}} x^3 + o(x^3) \\
&= x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = x + O(x^3).
\end{aligned}$$

Durch quadrieren ergibt sich

$$\sinh^2(x) = (x + O(x^3))^2 = x^2 + O(x^4).$$

Somit gilt für den Grenzwert

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{\sinh^2(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + O(x^4)}{x^2 + O(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1 + \frac{O(x^4)}{x^2})}{x^2(1 + \frac{O(x^4)}{x^2})} \\ &= \frac{1 + \lim_{x\to 0} \frac{O(x^4)}{x^2}}{1 + \lim_{x\to 0} \frac{O(x^4)}{x^2}} = 1.\end{aligned}$$