Boîte à outils

November 5, 2024

Contents

1 Suites

1.1 Résultats principaux

Definition 1.1. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite à valeur dans $\mathbb{R}$. On dit que $(a_n)_{n\geq 1}$ *converge vers* $a \in \mathbb{R}$, noté $a_n \to a$, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|a_n - a| \leq \epsilon$. On dit que *la suite* $(a_n)_{n\geq 1}$ *converge* si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $a_n \to a$.

Si pour tout $r \in \mathbb{R}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $a_n \geq r$, on dit que $(a_n)_{n\geq 1}$ *diverge vers l'infini*, notés $a_n \to +\infty$.

Si pour tout $r \in \mathbb{R}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $a_n \leq r$, on dit que $(a_n)_{n\geq 1}$ *diverge vers moins l'infini*, notés $a_n \to -\infty$.

Les résultats principaux:

A) La convergence et la valeur de la limite de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ ne dépendent pas de $(a_k)_{k=1,\ldots,N}$ pour n'importe quel $N \in \mathbb{N}$ fixé.

B) Les suites croissantes majorées convergent, de même pour les suites décroissantes minorées.

C) Une suite converge si et seulement si c'est une suite de Cauchy.

D) Théorème des gendarmes: si $b_n \leq a_n \leq c_n$ et $b_n \to a$, $c_n \to a$, alors $a_n \to a$. Aussi, si $b_n \leq a_n$ et $b_n \to +\infty$, alors $a_n \to +\infty$, et si $b_n \leq a_n$ et $a_n \to -\infty$, alors $b_n \to -\infty$.

E) "Stabilité" des limites sous les sommes, produits, divisions.

F) Si a_n converge vers a et que $f : I \to \mathbb{R}$ satisfait

- $a_n \in I$ pour tout n et $a \in I$,
- f continue en a,

alors $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.

1.2 Tricks

Quelques "tricks" pour l'étude de suites:

- Pour montrer qu'une suite ne converge pas, on peut extraire deux sous-suites convergentes avec des limites différentes.

- Si la suite contient un terme qui "oscille", par exemple $a_n = \cos(2\pi n/m)$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ fixé, traiter séparément les m différentes possibilités pour la valeur de n mod m.

- Si la suite est une somme/produit/etc. de suites plus simples, étudier d'abord chacune des suites plus simples.

- Pour les suites définies par récurrence: $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_{n+1} = f(a_n)$. Si f est continue et que a_n converge, la limite a satisfait $f(a) = a$.

- En général: calculer les premiers termes de la suite pour avoir une idée de ce qui se passe. Chercher de la monotonicité dès que possible.
- Si $a_n = \frac{b_n}{c_n}$, mettre en évidence le terme qui croit le plus vite dans b_n et c_n.

1.3 (Contre-)exemples

- la suite $a_n = (-1)^n$ est bornée mais non-convergente.
- les suites $a_n = n$ et $a_n = -n$ sont monotones mais non-convergentes.
- la suite
$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair,} \\ n & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases}$$
ne converge pas et ne diverge pas vers $+\infty$.
- la suite $a_n = \frac{1}{1+n} + x$ converge vers x et $a_n \neq x$ pour tout n. De même pour la suite $a_n = x - \frac{1}{1+n}$.
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

2 Séries

2.1 Résultats principaux

Definition 2.1. La série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge si la limite

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n$$

existe. On pose alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n$.

La série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument si la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge. La convergence absolue implique la convergence.

Les résultats principaux:

A) Soit $N \in \mathbb{N}$ fixé. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} a_{N+n}$ converge. De même, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} a_{N+n}$ converge absolument. ATTENTION:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \neq \sum_{n=0}^{\infty} a_{N+n}.$$

B) Si $|a_n| \leq b_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument.

C) Critère du quotient: si $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L$, on a

- si $|L| < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument,
- si $|L| > 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

D) Critère de la racine: si il existe $C \geq 0$, $c \in [0, 1)$, $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $|a_n| \leq Cc^n$ pour tout $n \geq n_0$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument.

E) Série alternée: si $a_n \geq 0$ pour tout n, la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge si et seulement si $a_n \to 0$. ATTENTION: la série ne converge pas absolument en général.

F) Comparaison somme-intégrale. Soit $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ une fonction décroissante, alors l'intégrale impropre

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \lim_{K\to\infty} \int_0^{K} f(x)dx$$

existe si et seulement si la série $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ converge. En particulier, la série avec paramètre $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2.2 Tricks

- Si les a_n contiennent des factorielles, essayer le critère du quotient.
- Si les a_n ne contiennent que des exponentielles et des puissances, essayer le critère de la racine.
- Si les a_n sont des ratios de polynômes, essayer de comparer avec la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ pour un α approprié.
- Si la suite a_n ne converge pas vers 0, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ne converge pas.

2.3 (Contre-)exemples

- La série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ne converge pas mais $\frac{1}{n} \to 0$. En revanche, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge (mais pas absolument).
- La série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$, elle converge même absolument si $|x| < 1$.