EPFL – Automne 2024	
Analyse I – MT	**Exercices**
Série 7	28 octobre 2024
Questions durant la session du 4 novembre	

Remarque
Certains exercices consistent en des questions de type Vrai ou Faux (V/F). Pour chaque question, répondre VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Exercice 1.
Calculer la valeur des séries suivantes

(i) $-\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$ $\qquad$ (ii) $\sum_{k=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$

Exercice 2.
Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite numérique. Vrai ou faux ?

Q1 : Si $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Q2 : Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Q3 : Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument, alors $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge.

Q4 : Si $(a_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante, alors $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge.

Q5 : Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

Q6 : Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

Q7 : La série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ converge.

Exercice 3.
Déterminer si la série donnée converge ou diverge :

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{4n+5}\right)^n$ $\qquad$ (iv) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+7}-n\right)$ $\qquad$ (vii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n}}{n}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{3^n}$ $\qquad$ (v) $\sum_{n=1}^{\infty}1-\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ $\qquad$ $(viii)$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^d}{(dn)!}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n-2}$ $\qquad$ (vi) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+4)(n-3)}{7n^3+n+2}$

<u>*Indication*</u> :

- Pour la série (v), cette égalité peut vous aider : $1-\cos(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2$, for $x\in\mathbb{R}$.
- Pour la série $(viii)$, considerez les cas $d = 1, 2, 3$.

Exercice 4.
À l'aide du critère de d'Alembert, déterminer, parmi les séries suivantes, lesquelles convergent

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^k}{k!} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}$$

Exercice 5.
Étudier la convergence des séries suivantes en fonction de la valeur du paramètre $c\in\mathbb{R}$.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c}{1-c}\right)^n$, (avec $c \neq 1$)

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c^n$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\left(\frac{\pi c}{2}\right)\right)^n$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^n n!}{n^n}$

Quelles sont les valeurs des séries (i) et (iii) lorsqu'elles convergent ?

Exercice 6.
Montrer que les suites suivantes sont convergentes en montrant qu'elles sont monotones et bornées et trouver leur limite.
On propose de procéder de la façon suivante :

- *Étape 1* : Calculer quelques termes. Deviner si la suite sera croissante ou décroissante.
- *Étape 2* : Trouver la limite l en résolvant $l = f(l)$ et en utilisant que $l \geq x_0$ si (x_n) est croissante ou que $l \leq x_0$ si (x_n) est décroissante. Ici, le point clé est : si f est continue et la suite $x_{n+1} = f(x_n)$ (avec x_0 fixé) converge vers une limite l, celle-ci satisfait

$$l = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(l).$$

- *Étape 3* : Montrer par récurrence que $x_0 \leq x_n \leq l$ ou $l \leq x_n \leq x_0$.
- *Étape 4* : Montrer que (x_n) est monotone.

(i) $x_0 = 1$, $x_{n+1} = f(x_n) = \sqrt{2 + x_n}$.

(ii) $x_0 = \dfrac{3}{2}$, $x_{n+1} = f(x_n) = 1 + \dfrac{1}{2}x_n^2 - \dfrac{1}{2}x_n$.

(iii) $x_0 = \dfrac{3}{2}$, $x_{n+1} = f(x_n) = 3 - \dfrac{1}{x_n}$.

Exercice 7.
Montrer que les suites définies par récurrence suivantes convergent et trouver leur limite.

(i) $x_0 = \dfrac{5}{2}$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 6}{5}$.

(ii) $x_0 = -3$, $x_{n+1} = 2x_n + 3$.

Exercice 8.
Soit $f\colon \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{-5x^2 + 14x}{4(x-1)}$$

et la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par récurrence

$$\begin{cases} x_0 = -2 \\ x_{n+1} = f(x_n) \qquad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

Alors :

- ☐ (x_n) converge et $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.
- ☐ (x_n) converge et $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$.
- ☐ (x_n) diverge, $\limsup_{n\to\infty} x_n = 4$ et $\liminf_{n\to\infty} x_n = -2$.
- ☐ (x_n) diverge, $\limsup_{n\to\infty} x_n = 2$ et $\liminf_{n\to\infty} x_n = 0$.

Exercice 9 (*Facultatif*).
Le but de cet exercice est de montrer que la série harmonique diverge, c-à-d

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

On propose de procéder de la façon suivante. Soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Considérer la sous suite $(S_{n_j})_{j\geq 1} \subset (S_n)$ donnée par $n_j = 2^j$.

(a) Montrer par récurrence que pour tout $j \geq 1$,

$$S_{n_j} = 1 + \sum_{m=1}^{j} \sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{1}{k}$$

(b) En utilisant que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^{m-1} + 1 \leq k \leq 2^m$, on a $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2^m}$, montrer que

$$S_{n_j} \geq 1 + \frac{j}{2}.$$

(c) En déduire que $\lim_{j\to\infty} S_{n_j} = +\infty$ et donc (S_n) diverge.

Solution des exercices calculatoires

Exercice 1 (i) $\dfrac{1}{3}$

(ii) $\dfrac{1}{12}$

Exercice 5 (i) $\dfrac{1}{1-2c}$

(iii) $\dfrac{\sin(\pi c/2)}{1-\sin(\pi c/2)}$