Remarque
Certains exercices consistent en des questions de type Vrai ou Faux (V/F). Pour chaque question, répondre VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Exercice (À rendre durant les cours des 14 ou 16 octobre)**.**
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{j=1}^{n+1} j\, 2^j = n\, 2^{n+2} + 2$$

Exercice 1.
Calculer le module des nombres complexes suivants :

(i) e^{i+1} (ii) $e^{-(i+1)}$ (iii) $e^{-(i-1)}$ (iv) $e^{(i-50)}$ (v) $e^{(1-50i)}$

Exercice 2.
Montrer que la suite donnée par $a_n = \dfrac{3n}{n+2}$ (avec $n \geq 1$) est croissante et bornée.

Exercice 3.
Déterminer si les suites $(a_n)_{n\geq 1}$ suivantes sont monotones :

(i) $a_n = n^2 - 4n + 1$ (ii) $a_n = \dfrac{n}{2n-1}$

Exercice 4.
Trouver toutes les solutions des équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

(i) $z^5 = 1$ (ii) $z^2 = -3 + 4i$ (iii) $z^4 = -2i$ (iv) $z^3 = -\sqrt{3} + i$

Représenter les résultats graphiquement.

Exercice 5.
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

(i) $z^2 + 6z + 12 - 4i = 0$ (ii) $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$

Exercice 6.
Factoriser les polynômes suivants :

(i) $p(z) = \dfrac{1}{2}z^3 - 4z^2 + 7z - 6$ (ii) $p(z) = z^3 - (3+3i)z^2 + (-2+9i)z + 6$

Indication : Après avoir fait la liste de toutes les valeurs z_0 pour lesquelles on teste $p(z_0)$ pour voir si on obtient 0 (y en a pas mal) tester avec $z_0 = -1, 1, 3, 6$ (ça fait moins à tester).

Exercice 7.
Vrai ou faux ?

Q1 : Le polynôme z^2+1 divise $z^6+3z^4+z^2-1$. (*Voir Remarque 0.46 (p.16) du polycopié.*)

Q2 : Soient $z_1,\dots,z_n$ les racines complexes du polynôme $z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$. Alors on a $\prod\limits_{j=1}^{n} z_j=(-1)^n a_0$.

Q3 : Il existe un entier $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$ soit purement imaginaire (c-à-d. sa partie réelle est nulle).

Q4 : Il existe un entier $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\left(1-i\sqrt{3}\right)^n$ soit réel.

Exercice 8.
Montrer à l'aide de la définition de la limite que :

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$ $\qquad$ (ii) $\forall p>0,\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^p}=0$ $\qquad$ (iii) $\forall p>0,\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p}=0$

On admettra sans démonstration que pour $p>0$ (et donc en particulier pour $p=\frac{1}{2}$), la fonction $f\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ définie par $f(x)=x^p$ est strictement croissante. C'est-à-dire, $\forall x,y\in\mathbb{R}_+,\ x<y \quad\Leftrightarrow\quad x^p<y^p$. On aura les outils pour le montrer à la fin du chapitre 6.

Exercice 9.
Déterminer, si elle existe, la limite $n\to\infty$ de la suite $(a_n)_{n\geq1}$ avec

(i) $a_n=(-1)^n\dfrac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}}$

(ii) $a_n=\dfrac{1}{2^n}$

(iii) $a_n=e^n$

(iv) $a_n=e^{-n}$

(v) $a_n=\dfrac{\sin(n+1)-\sin(n-1)}{\cos(n+1)+\cos(n-1)}$

(vi) $a_n=3^ne^{-3n}$

Exercice 10.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.
Vrai ou faux ?

Q1 : Si (a_n) est bornée, alors (a_n) converge.

Q2 : Si (a_n) converge, il existe $\epsilon>0$ tel que $|a_n|\leq\epsilon$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Q3 : Si $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, alors il existe $\delta>0$ tel que $|a_n-a|\leq\delta$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Q4 : Une suite convergente peut admettre plusieures limites.

Q5 : Toute suite décroissante converge.

Q6 : Si $a_n>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et (a_n) converge vers a, alors $a>0$.

Exercice 11.
Soit $(a_k)_{k\geq1}$ la suite définie par

$$a_k=\frac{6-2k}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

et $(x_n)_{n\geq1}$, la suite définie par

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{6-2k}{(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

(i) Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

$$x_n=\frac{2n}{(n+2)(n+3)}$$

(ii) Déterminer la limite $\lim_{n\to\infty}x_n$.

Solution des exercices calculatoires

Exercice 1
(*i*) e
(*ii*) $\frac{1}{e}$
(*iii*) e
(*iv*) e^{-50}
(*v*) e

Exercice 4
(*i*) $z_0 = 1$, $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{5}}$, $z_3 = e^{i\frac{6\pi}{5}}$, $z_4 = e^{i\frac{8\pi}{5}}$
(*ii*) $z_0 = -1-2i$, $z_1 = 1+2i$
(*iii*) $z_0 = \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}$, $z_1 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{3\pi}{8}}$, $z_2 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{7\pi}{8}}$, $z_3 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{11\pi}{8}}$
(*iv*) $z_0 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{18}}$, $z_1 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{17\pi}{18}}$, $z_2 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{29\pi}{18}}$

Exercice 5
(*i*) $z_1 = -2+2i$, $z_2 = -4-2i$
(*ii*) $z_0 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$, $z_1 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_2 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}$, $z_3 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{-\pi}{12}}$, $z_4 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$, $z_5 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$

Exercice 6
(*i*) $p(z) = \frac{1}{2}(z-1-i)(z-1+i)(z-6)$
(*ii*) $p(z) = (z-i)(z-2i)(z-3)$

Exercice 9
(*i*) 0
(*ii*) 0
(*iii*) $+\infty$
(*iv*) 0
(*v*) $\tan(1)$
(*vi*) 0

Exercice 11
(*ii*) 0