EPFL – Automne 2024	
Analyse I – MT	**Exercices**
Série 4	30 septembre 2024

Remarque
Certains exercices consistent en des questions de type Vrai ou Faux (V/F). Pour chaque question, répondre VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Exercice 1.
Donner l'infimum et le supremum des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ ci-dessous et préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum (*pas besoin de faire la demonstration*).

$$(i)\ A =]-1, \sqrt{2}\,] \qquad (ii)\ B =]\sqrt{3}, \infty\,[\qquad (iii)\ C = \{x \in \mathbb{R} : |2x-1| \leq 1\}$$

Exercice 2.
Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

Exercice 3.
Réecrire les sous-ensembles suivants en utilisant la notation des intervalles :

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 1\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 1\}$
3. $C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -x \leq 1\}$
4. $D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \leq 2\}$
5. $E = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \geq 2\}$
6. $F = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -x^3 \geq 3\}$

Exercice 4.
Exprimer chacun des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ ci-dessous en termes de réunions ou d'intersections d'intervalles (ouverts, fermés ou non).

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x| < 1000\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 \geq 100\}$
3. $C = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x^3 = 27\}$
4. $D = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq 33\}$
5. $E = \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x^2 - 2| < 1\}$

Exercice 5.
Soit $b \in \mathbb{R}$.

(i) Montrer que $I =]-\infty, b[$ n'est pas minoré et $\sup I = b$.

(ii) Montrer que $I = [b, +\infty[$ n'est pas majoré et $\inf I = b$.

Exercice 6.
Soit $A \subset \mathbb{R}$ un **intervalle** borné non vide.
Vrai ou faux ?

Q1 : Il suit que $\sup A \in A$ et $\inf A \in A$.

Q2 : Si $\sup A \in A$ et $\inf A \in A$, alors A est fermé.

Q3 : Si A est fermé, alors $\sup A \in A$ et $\inf A \in A$.

Q4 : Si $\sup A \notin A$ et $\inf A \notin A$, alors A est ouvert.

Q5 : Si A est ouvert, alors $\inf A \notin A$ et $\sup A \notin A$.

Exercice 7.
Résoudre les inéquations suivantes :

(i) $x^2 - 2x - 2 < 0$ pour $x \in \mathbb{R}$

(ii) $|x-2| \leq |x+3|$ pour $x \in \mathbb{R}$

(iii) $\dfrac{1}{1-|x|} < 1$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

(iv) $\dfrac{x}{|x|-2} + \dfrac{|x|}{x+1} \geq 0$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2, -1\}$

c'est-à-dire spécifier (en termes d'unions d'intervalles) les ensembles $A \subset \mathbb{R}$ tels que les inéquations sont satisfaites pour tout $x \in A$ et pas satisfaites pour $x \notin A$.
Indication : il est parfois utile de considérer plusieurs cas séparément.

Exercice 8.
Le plus grand sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$

$$||x-1|-1| \leq ||x|-1|$$

est

- ☐ $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right[$
- ☐ $\left[0, \frac{1}{2}\right] \cup [2, \infty[$
- ☐ $\left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cup]1, 2[$
- ☐ $\left[\frac{3}{2}, \infty\right[$

Exercice 9.
Trouver la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

(i) $(2-3i)(3+2i)$

(ii) $\dfrac{2-3i}{4-5i}$

(iii) $\dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1+2i} + \dfrac{1}{1+3i}$

(iv) $\dfrac{2-3i}{2+i} + \dfrac{1-i}{1+3i}$

(v) $\left(\dfrac{10-15i}{2+i}\right)\left(\dfrac{1+i}{1-3i}\right)$

Exercice 10.
Trouver le module et l'argument des nombres complexes suivants :

(i) -2

(ii) $2+2i$

(iii) $-1+i\sqrt{3}$

(iv) $-1+i\tan(3)$

(v) $\dfrac{8i^{21}-2i^{11}}{1-i}$

Exercice 11.
Dans la série 1, on avait rappelé les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1 \\
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\
2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) &= \sin(x) - \sin(y)
\end{aligned}$$

Montrer ces formules à l'aide des formules d'Euler.

Exercice 12.
Le but de cet exercice est de se familiariser avec la "règle de grammaire" mentionnée dans le cours et comment l'appliquer dans l'écriture des mathématiques.
Soit $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x^2}$. On a alors que la propriété

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0 \text{ tel que } \forall x \geq M,\ |f(x)| \leq \varepsilon.$$

est vraie.
Ci-dessous, deux démonstration du résultat. Dans l'une d'elles, nous avons glissé deux erreurs.
Laquelle de ces deux démonstrations est correcte et où sont les problèmes ?

Remarque.
la propriété ci-dessus sera étudiée dans le chapitre 4, c'est-à-dire, vous n'êtes pas sensé · e comprendre ce que la propriété veut dire. Les problèmes dans la démonstration ne sont pas dûs à ce que la démonstration raconte, mais plutôt, dans la grammaire employée dans la démonstration.

Démonstration. On doit montrer qu'on peut trouver $M \geq 0$ tel que dès que $x \geq M$, $|f(x)| = \frac{1}{x^2} \leq \varepsilon$, quelque soit $\varepsilon > 0$.
Posons $M := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > 0$ et considérons $x \geq M$ quelconque. Alors,

$$|f(x)| = \frac{1}{x^2} \overset{x \geq M}{\leq} \frac{1}{M^2} \overset{M=1/\sqrt{\varepsilon}}{=} \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} = \varepsilon.$$

ε étant quelconque, on a le résultat voulu. $\square$

Démonstration. On doit montrer que quelque soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver $M \geq 0$ tel que dès que $x \geq M$, $|f(x)| = \frac{1}{x^2} \leq \varepsilon$.
Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Posons $M := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > 0$ et considérons $x \geq M$ quelconque. Alors,

$$|f(x)| = \frac{1}{x^2} \overset{x \geq M}{\leq} \frac{1}{M^2} \overset{M=1/\sqrt{\varepsilon}}{=} \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} = \varepsilon,$$

ε étant quelconque, on a le résultat voulu. $\square$

Solution des exercices calculatoires

Exercice 9 Si $z = a + ib$ avec $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$,

(i) $12 - 5i$

(ii) $\dfrac{23}{41} - i\dfrac{2}{41}$

(iii) $4/5 - 6/5i$

(iv) $0 - 2i$

(v) $3 + 2i$

Exercice 10 Si $z = \rho e^{i\phi}$ avec $\rho = |z|$ et $\phi = \arg(z)$,

(i) $2e^{i\pi}$

(ii) $2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

(iii) $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

(iv) $\frac{1}{|\cos(3)|}e^{-3i}$

(v) $5\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$