Remarque
Certains exercices consistent en des questions de type Vrai ou Faux (V/F). Pour chaque question, répondre VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Exercice 1.
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2.$$

Exercice 2.
Le but de cet exercice est d'utiliser la définition du sinus et du cosinus comme rapports préservés dans les triangles rectangles semblables pour déterminer certaines valeurs du sinus, cosinus et tangente.

(i) En étudiant un triangle isocèle ABC rectangle en C de côtés $AB = \sqrt{2}$, $AC = 1$ et $BC = 1$, déterminer les valeurs de $\sin(\pi/4)$, $\cos(\pi/4)$ et $\tan(\pi/4)$.

(ii) En étudiant un triangle équilatéral de côté 1 et hauteur $\frac{\sqrt{3}}{2}$ déterminer les valeurs de $\sin(\pi/6)$, $\sin(\pi/3)$, $\cos(\pi/6)$, $\cos(\pi/3)$, $\tan(\pi/6)$ et $\tan(\pi/3)$.

Exercice 3.
Soit $X = \{0, 1\}$ et $f, g \colon X \to X$ deux fonctions.
Vrai ou faux ?

Q1 : $f \circ g = g \circ f \quad \Leftrightarrow \quad f = g$.

Q2 : Si f et g sont injectives, alors $f \circ g$ est injective.

Q3 : Si $f \circ f$ est injective, alors f est injective.

Q4 : Si $f \circ g$ est injective, alors g est injective.

Q5 : Si $f \circ g$ est surjective, alors f est surjective.

Exercice 4.
On note $\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq 0\}$.
Montrer que la fonction $f \colon \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$f(x) = \sqrt{-x}$$

est bijective.

Exercice 5.
Montrer que la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0, \\ 2(-n) - 1 & \text{si } n < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

est bijective.

Exercice 6.
Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (somme de carrés d'entiers) ;

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}k^2 = \frac{n(n+1)}{2}$ (somme alternée de carrés d'entiers) ;

Calculer $n = \displaystyle\sum_{k=0}^{1000}(k+1)(3k+2)$.

Exercice 7.
Pour $n, k \in \mathbb{N}$ des entiers avec $0 \leq k \leq n$ on définit par $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ le coefficient binomial. On rappelle que par convention $0! = 1$.

(i) Montrer *l'identité de Pascal*, c'est-à-dire, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k$ tel que $1 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

par un calcul direct.

(ii) Montrer, par récurrence et en utilisant le point précédent que, que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} \text{ est un entier.}$$

Exercice 8.
Ceci est un exercice sur la formule du binome de Newton.

(i) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

(ii) En déduire que, pour tout entier n, on a

$$2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.$$

Exercice 9.
Vrai ou faux ?

Q1 : La somme de deux rationnels est rationnelle.
Q2 : La somme de deux irrationnels est irrationnelle.
Q3 : La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est rationnelle.
Q4 : Le produit de deux rationnels est rationnel.
Q5 : Le produit de deux irrationnels est irrationnel.
Q6 : Le produit d'un rationnel et d'un irrationnel est rationnel.

Solution des exercices calculatoires

Exercice 3 (*i*) $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $\tan(\pi/4) = 1$

(*ii*) $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, $\cos(\pi/3) = 1/2$, $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$, $\sin(\pi/6) = 1/2$, $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, $\tan(\pi/6) = \sqrt{3}/3$.