EPFL – Automne 2024	
Analyse I – MT	**Exercices**
Série 13	9 décembre 2024
Questions durant la session du 16 décembre	

Remarque
Certains exercices consistent en des questions de type Vrai ou Faux (V/F). Pour chaque question, répondre VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Exercice 1.
Montrer que la fonction $f(x) = \dfrac{2}{3+4x}$ est analytique en x_0 et déterminer l'intervalle de convergence de la série de Taylor. Considerer les valeurs de x_0 suivantes :

(*i*) $x_0 = 0$

(*ii*) $x_0 = 2$

Exercice 2.
Déterminer la série de Taylor de $f(x)$ autour de x_0 et donner son rayon de convergence et son intervalle de convergence.

(*i*) $f(x) = e^{2x+1}$ avec $x_0 = 0$;

(*ii*) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ avec $x_0 = 2$.

Exercice 3.
Trouver les coefficients des quatre premiers termes a_0, a_1, a_2, a_3 de la série de Taylor autour de $x_0 = 0$ des fonctions f suivantes :

(*i*) $f(x) = \log\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

(*ii*) $f(x) = \tan(x)$

(*iii*) $f(x) = \arctan(x)$

(*iv*) $f(x) = \sqrt{1+\tan(x)}$

Exercice 4.
Déterminer le rayon de convergence et l'intervalle de convergence des séries entières données ci-dessous.

(*i*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n}\, x^n$

(*ii*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^n+1}}\, x^n$

(*iii*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^{2n}}{n3^{n+1}}$

(*iv*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(n)}{1+n^2}\, (x-2)^n$

Exercice 5.
Trouver des primitives pour les fonctions f suivantes :

(*i*) $f(x) = \sin(x)$

(*ii*) $f(x) = \cos(x)$

(*iii*) $f(x) = \tan(x)$

(*iv*) $f(x) = e^x$

(*v*) $f(x) = \sinh(x)$

(*vi*) $f(x) = \cosh(x)$

(*vii*) $f(x) = \log(x)$

(*viii*) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(*ix*) $f(x) = (ax+b)^s \quad (s \neq -1)$

(x) $f(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x}$

(xi) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ *(utiliser le point précédent)*

(xii) $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$

(xiii) $f(x) = \dfrac{1}{\tan(x)}$

(xiv) $f(x) = x\exp(x^2)$

(xv) $f(x) = (ax^p + b)^s x^{p-1}$ $(s \neq -1,\ a, p \neq 0)$

Exercice 6.
Calculer les primitives suivantes :

(i) $\displaystyle\int \frac{3x+4}{1+x^2}\,dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)^3}\,dx$ (iii) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}}\,dx$ (iv) $\displaystyle\int \frac{\sinh(x)}{e^x+1}\,dx$

Exercice 7.
En utilisant que si φ est bijective, alors

$$\int^x f(t)dt = \int^{\varphi^{-1}(x)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

(*comparer avec la formule de changement de variables donnée au cours*) trouver des primitives pour les fonctions f suivantes, avec le changement de variable $x = \varphi(u)$ indiqué :

(i) $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\varphi\colon]-\pi/2,\pi/2[\to]-1,1[$ définie par $\varphi(u) = \sin(u)$.

(ii) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $\varphi\colon]-\pi/2,\pi/2[\to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(u) = \tan(u)$.

Exercice 8.
Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Montrer par l'absurde que f n'admet pas de primitive.

<u>Indice</u> : si F est une primitive de f, comment se comporte F sur $\mathbb{R}^*$? Rappels : 1) une fonction est constante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable avec dérivée 0, 2) une primitive est continue.

Exercice 9.
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non-vide et borné et soit $f\colon I\to\mathbb{R}$ une fonction continue.

Q1 : f admet une primitive sur I.

Dans la suite on restreint le domaine de f à l'intervalle $[a,b]\subset I$ où $a,b\in I$ tels que $a<b$.

Q2 : Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$, alors f admet un zéro en $[a,b]$.

Q3 : Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$, alors $f(x)\geq 0$ pour tout $x\in[a,b]$.

Q4 : Si $f(x)<0$ pour tout $x\in[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx < 0$.

Soit encore F une primitive de f sur $[a,b]$.

Q5 : Si $f(x)\leq 0$ pour tout $x\in[a,b]$, alors $F(x)\leq 0$ pour tout $x\in[a,b]$.

Q6 : Pour tout $x\in[a,b]$, on a $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.

<u>Suggestion</u> : considerez le résultat (Théorème de la moyenne) qu'il faut montrer dans l'Exercice 11.

Exercice 10.
Vérifier les deux inégalités suivantes

$$\frac{7}{100} < \int_0^1 \frac{e^{-2x}}{5+x^3}\,dx < \frac{1}{10}\ .$$

<u>Indication</u> : utiliser le fait que $e > \dfrac{5}{2}$.

Exercice 11.

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. À l'aide du théorème fondamental du calcul intégral et du théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Solution des exercices calculatoires

Exercice 4 (i) $a_0 = 0,\ a_1 = -2,\ a_2 = 0,\ a_3 = -\dfrac{2}{3}$

(ii) $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = \dfrac{1}{3}$

(iii) $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = -\dfrac{1}{3}$

(iv) $a_0 = 1,\ a_1 = \dfrac{1}{2},\ a_2 = -\dfrac{1}{8},\ a_3 = \dfrac{11}{48}$

Exercice 5 (i) $r = 1,\ I = [-1, 1[$

(ii) $r = +\infty,\ I = \mathbb{R}$

(iii) $r = \sqrt{3},\ I = [2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}]$

(iv) $r = 1,\ I = [1, 3]$