Limites de suites et fonctions 1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la fonction $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f_\alpha(x) = (\cos(2x))^3 e^{\alpha x}.$$

a) Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}^*$ la fonction f_α admet-elle une limite en $+\infty$? et en $-\infty$?

b) Est-ce que la suite $a_n = f_2(n)$ converge ? et la suite $a'_n = f_{-2}(n)$?

c) Est-ce que la suite $b_n = f_0(\pi n)$ converge ?

d) Est-ce que la suite $c_n = f_0(\pi n/4)$ converge ?

e) Soit $d_n = f_0(\pi n/2)$. Que valent $\limsup_{n\to\infty} d_n$ et $\liminf_{n\to\infty} d_n$?

f) Est-ce que f_0 admet une limite en $+\infty$? et en $-\infty$?

Limites de suites et fonctions 2

On définit la suite

$$a_n = \frac{n^2 + \cos(n)n - 4}{6n^2 + n^2/\ln(n) + 1}, \; n \geq 1.$$

Est-ce que la suite converge ? si oui, vers quoi ?

Est-ce que l'on pourrait convertir ce problème en une limite de ratio de fonctions et appliquer l'Hospital dans ce cas ?

Continuité et dérivabilité

On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \leq 0, \\ x + 3x^2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

a) Est-ce que f est continue en 0 ?
b) Est-ce que f est dérivable en 0 ?
c) Est-ce que $f \in C^1(\mathbb{R})$?
d) Est-ce que $f \in C^2(\mathbb{R})$?

Série de Taylor et rayon de convergence

On définit la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{x^3}.$$

a) Quelle est la série de Taylor de f en 1 ?

b) Quel est le rayon de convergence de cette série de Taylor ?

Polynôme de Taylor et dérivée 1

Soit $f \in C^n(\mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Soient $a_1, a_2, \cdots \in \mathbb{R}$. On trouve que pour tout $n \geq 1$,

$$T_n(x; f, x_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k.$$

Que valent les dérivées de f en x_0 ?

Polynôme de Taylor et dérivée 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \sqrt{1+x}.$$

a) Quel est le polynôme de Taylor (développement limité) à l'ordre 2 de f en 0 ?

b) Montrer que pour tout $x \in [-1/2, 1/2]$, on a

$$|f(x) - T_2(x; f, 0)| \leq \frac{\sqrt{2}}{32}$$

c) Montrer que

$$\Big| \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\sqrt{1+x}}{3+2x+x^2} dx - \int_{-1/2}^{1/2} \frac{T_2(x; f, 0)}{3+2x+x^2} dx \Big| \leq \frac{\sqrt{2}}{64}.$$

Polynôme de Taylor et dérivée 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \sqrt{1 + \cos^2(x)/2}.$$

a) Pourquoi est-ce que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$?

b) Quel est le polynôme de Taylor (développement limité) à l'ordre 4 de f en 0 ?

Existence de solutions

Soit $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. On pose alors $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \sin(f(x)).$$

Que peut-on dire sur les zéros de g ?

Intégrale de fraction rationnelle

Calculer
$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2 - 7x + 12} dx.$$
Quels sont les intervalles $[a, b]$ sur lesquels l'intégrale de Riemann $\int_a^b \frac{x}{x^2-7x+12} dx$ est bien définie ? Pourquoi ?