Chapitre IV : Fonctions numériques et continuité

- Sup et Inf de fonctions
- Continuité
- Quelques familles de fonctions
- Limites de fonctions et extension par continuité
- Extrema de fonctions continues
- Valeurs intermédiaires
- Continuité et bijectivité
- Notions plus fortes de continuité

Cadre

Dans ce chapitre, on commence l'étude des fonctions numériques : $f : A \to B$ avec $A, B \subset \mathbb{R}$.

Rappel : inf et sup d'ensemble

- $\sup A$ est le plus petit majorant de A,
- $\inf A$ est le plus grand minorant de A,
- $\max A$ est définit seulement si $\sup A \in A$ et est égal à $\sup A$,
- $\min A$ est définit seulement si $\inf A \in A$ et est égal à $\inf A$.

Rappel : inf et sup d'ensemble

On a alors que si $A, B \subset \mathbb{R}$,

- $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ (voir slide suivant pour une preuve),
- $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$,
- si $A \subset B$, $\sup A \leq \sup B$ et $\inf A \geq \inf B$.

En particulier, quand tous les max et min sont bien définis,

$$\max(A \cup B) = \max(\max A, \max B),$$
$$\min(A \cup B) = \min(\min A, \min B).$$

$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$

On montre l'égalité par double inégalités : $x = y$ est équivalent à $x \leq y$ ET $x \geq y$.
Posons $S = \sup(A \cup B)$ et $M = \max(\sup A, \sup B)$.

Comme $A, B \subset A \cup B$, $\sup A \leq S$ et $\sup B \leq S$, donc $S \geq \max(\sup A, \sup B) = M$.

De l'autre côté, M est un majorant de A et de B car $M \geq \sup A$ et $M \geq \sup B$, donc M est un majorant de $A \cup B$ et donc $M \geq \sup(A \cup B) = S$.

Rappel

Si $A, B \subset \mathbb{R}$, une fonction est une application $f : A \to B$ telle que $f(x) \in B$ pour tout $x \in A$.

A est appelé le *domaine* (ou *domaine de définition*) de f et B le *co-domaine* de f.

On rappelle aussi : pour $C \subset A$ et $D \subset B$,

$$f(C) = \{y \in B : \ \exists x \in C, f(x) = y\},$$
$$f^{-1}(D) = \{x \in A : \ f(x) \in D\},$$

l'image par f de C et *la pré-image par f de D*. On note $\text{Image}(f) = f(A)$ *l'ensemble image* de f.

Fonction définie par morceaux

On utilisera souvent la notation suivante : si $f : A \to B$ est tel que $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ avec $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$ (le domaine de f est une union disjointe d'ensembles),

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in A_1, \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x) & \text{si } x \in A_n, \end{cases}$$

avec $f_i : A_i \to B$ pour tout i.

Somme et produit de fonctions

Soient $f, g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On définit les fonctions

$$\begin{aligned} (f+g) : A \to \mathbb{R}, &\qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x), \\ (f \cdot g) : A \to \mathbb{R}, &\qquad (fg)(x) = f(x)g(x). \end{aligned}$$

Sup et Inf de fonctions

Sup et inf de fonctions

Si $f : A \to B$ $(A, B \subset \mathbb{R})$, on définit

- $\sup f := \sup_{x\in A} f(x) := \sup f(A) = \sup \mathrm{Image}(f)$,
- $\inf f := \inf_{x\in A} f(x) := \inf f(A) = \inf \mathrm{Image}(f)$.

Si $f(A)$ n'est pas majoré, on pose $\sup f = +\infty$. Si $f(A)$ n'est pas minoré, on pose $\inf f = -\infty$.

Et, quand les quantités sont bien définies,

- $\max f := \max_{x\in A} f(x) := \max f(A) = \max \mathrm{Image}(f)$,
- $\min f := \min_{x\in A} f(x) := \min f(A) = \min \mathrm{Image}(f)$.

ATTENTION : dans la notation $\sup f$, le domaine de f est implicite ! D'où l'importance de bien faire attention à quel est le domaine de la fonction que l'on étudie.

Exemples

Quels sont le sup et l'inf des fonctions

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$?

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x$?

(c) $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x$?

(d) $f : (0,1) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$?

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x)$?

(e) $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$?

Sup et inf de sommes

Theorem

Soient $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$. *Alors,*

(1) Si $f \leq g$ *(*$\forall x \in A$, $f(x) \leq g(x)$*),*

$$\sup f \leq \sup g, \qquad \inf f \leq \inf g.$$

(2) $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$.

(3) $\inf(f+g) \geq \inf f + \inf g$.

Preuve de (1)

Supposons $f \leq g$. Posons $S_f = \sup f$, $S_g = \sup g$, $I_f = \inf f$ et $I_g = \inf g$.

On montre que S_g est un majorant de $f(A)$ (ce qui implique que $S_g \geq S_f$ car S_f est le plus petit majorant de $f(A)$). Soit $y \in f(A)$. On a alors qu'il existe $x \in A$ avec $f(x) = y$. Comme $f \leq g$,

$$y = f(x) \leq g(x) \leq S_g.$$

On a montré que pour n'importe quel $y \in f(A)$, $S_g \geq y$. Donc S_g est un majorant de $f(A)$.

On procède de la même manière pour montrer que I_f est un minorant de $g(A)$, ce qui implique que $I_f \leq I_g$.

Preuve de (2)

On montre que $\sup f + \sup g$ est un majorant de $(f+g)(A)$.

Soit $y \in (f+g)(A)$. Alors, il existe $x \in A$ tel que

$$(f+g)(x) = y.$$

On a alors

$$y = (f+g)(x) = f(x) + g(x) \leq \sup f + \sup g.$$

On a montré que pour n'importe quel $y \in (f+g)(A)$, $y \leq \sup f + \sup g$. Donc, $\sup f + \sup g$ est un majorant de $(f+g)(A)$.

Preuve de (3)

On montre que $\inf f + \inf g$ est un minorant de $(f+g)(A)$.

Soit $y \in (f+g)(A)$. Alors, il existe $x \in A$ tel que

$$(f+g)(x) = y.$$

On a alors

$$y = (f+g)(x) = f(x) + g(x) \geq \inf f + \inf g.$$

On a montré que pour n'importe quel $y \in (f+g)(A)$, $y \geq \inf f + \inf g$. Donc, $\inf f + \inf g$ est un minorant de $(f+g)(A)$.

Fonctions bornées

Definition

Soit $f : A \to \mathbb{R}$. On dit que f est

- *majorée* si Image(f) l'est,
- *minoré* si Image(f) l'est,
- *bornée* si elle est majorée et minorée.

En d'autres mots, f est majorée si $\sup f \neq +\infty$ (il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \leq C$ pour tout $a \in A$) et f est minorée si $\inf f \neq -\infty$ (il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \geq c$ pour tout $a \in A$).

Continuité

Continuité

Definition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $x \in I$. On dit que f est *continue en* x si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in I$ avec $|x - y| \leq \delta$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

Si f n'est pas continue en x, elle est *discontinue* et x. On dit que f est *continue* si elle est continue en tout point de son domaine de définition.

Continuité : exemples

Lesquelles de ces fonctions sont continues ?

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$;

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$;

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0; \end{cases}$$

(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 1, \\ 0 & \text{si } x = 1; \end{cases}$$

(5) Soit $c \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$.

Preuves au tableau.

Continuité, définition alternative

Theorem

Soit $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle. Soit* $f : I \to \mathbb{R}$*. Soit* $x \in I$*. Alors* f *est continue en* x *si et seulement si* ***pour toute*** *suite à valeurs dans* I, $(x_n)_{n\geq 1}$*, telle que* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$*, on a que la suite* $\big(f(x_n)\big)_{n\geq 1}$ *converge vers* $f(x)$ *(*$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$*).*

Preuve de continue et $x_n \to x$ implique $f(x_n) \to f(x)$ au tableau (ou sur le slide suivant).

En particulier, on peut "échanger" les fonctions continues et les limites : si f est continue, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big)$.

On montre que f continue en x et $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ implique $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

Soit $\epsilon > 0$.

- Comme f est continue en x, il existe $\delta > 0$ tel que $|y - x| \leq \delta$ implique $|f(y) - f(x)| \leq \epsilon$.
- Comme $x_n \to x$, il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|x_n - x| \leq \delta$. En particulier, pour tout $n \geq n_0$, $|f(x_n) - f(x)| \leq \epsilon$.

$\epsilon > 0$ étant arbitraire, on a montré que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|f(x_n) - f(x)| \leq \epsilon$ ce qui est la convergence de $f(x_n)$ vers $f(x)$.

Application 1 : montrer la discontinuité

On veut montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases},$$

est discontinue en 2. On regarde la suite $(x_n)_{n \geq 1}$:

$$x_n = \begin{cases} 2 + \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ pair} \\ 2 - \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}.$$

On a que $x_n \to 2$ mais,

$$f(x_n) = \begin{cases} (2 + 1/n)^2 \geq 4 & \text{si } n \text{ pair} \\ 2 - \frac{1}{n} \leq 2 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

ne converge pas vers $f(2) = 2$.

Application 2 : suites définies par récurrence

Si on a une suite définie par récurrence : $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 1$ pour une fonction **continue** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On obtient que, si la suite converge vers une limite x, alors x est solution de $f(x) = x$.

En effet,

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big) = f(x).$$

Exemples dans les séries 7 et 8.

Exemple

On regarde la suite, pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$x_0 \in \mathbb{R}, \quad x_{n+1} = ax_n + b.$$

I.e. : $x_{n+1} = f(x)$, avec $f(x) = ax + b$.

On a alors que $(x_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si $|a| < 1$, et, quand elle converge, la limite est

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{b}{1-a}.$$

Exemple

Supposons que la suite converge vers une limite x. On a alors $x = ax + b$, ce qui donne

$$x = \frac{b}{1-a},$$

ce qui est la limite voulue.

On regarde maintenant quand est-ce que la suite converge. On montre par récurrence que pour tout $n \geq 1$

$$x_n = a^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^k b = a^n x_0 + b\frac{1-a^n}{1-a}.$$

De là, on remarque que la suite converge si et seulement si $|a| < 1$ (soit calcul exact, soit critère de Cauchy).

Application 2 : suites définies par récurrence

On combine souvent cette observation avec de la monotonicité :

Theorem

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, et $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ une suite définie par récurrence. Si f est croissante ($x \leq y$ implique $f(x) \leq f(y)$), alors

- *si $x_0 \leq x_1$, la suite est croissante,*
- *si $x_0 \geq x_1$, la suite est décroissante.*

Au tableau. Idée : si $x_n \leq x_{n+1}$, alors $x_{n+1} = f(x_n) \leq f(x_{n+1}) = x_{n+2}$.

Application 2 : suites définies par récurrence

Theorem

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, et $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ une suite définie par récurrence. Si f est décroissante ($x \leq y$ implique $f(x) \leq f(y)$), alors les suites

$$a_n = x_{2n},\ n \geq 0, \qquad b_n = x_{2n+1},\ n \geq 0$$

sont monotones. De plus, $(a_n)_{n\geq 1}$ est croissante si et seulement si $(b_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

En exercice pour les motivés.

Application 2 : suites définies par récurrence

Si on se trouve dans le cas monotone, on peut alors chercher à borner la suite pour garantir sa convergence (ce qui est plus simple que de calculer la limite). On trouve la limite en résolvant $x = f(x)$.

Voir séries.

Opérations sur les fonctions continues

Theorem

Soit $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle et* $x_0 \in I$*. Soient* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues en* x_0 *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Alors,*

- $f + g : I \to \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ *est continue en* x_0,
- $f \cdot g : I \to \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ *est continue en* x_0,
- $\lambda f : I \to \mathbb{R}$, $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ *est continue en* x_0,
- *si* $f(x_0) \neq 0$, *il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $\frac{1}{f} : I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \to \mathbb{R}$, $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$ *est bien définie et est continue en* x_0.

Preuves sur les slides suivants.

Pour la culture : $f + g$ est continue en x_0

Soit $\epsilon > 0$. Par continuité de f, g en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ avec $|x - x_0| \leq \delta$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon/2 \quad \text{et} \quad |g(x) - g(x_0)| \leq \epsilon/2.$$

On a alors

$$|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| = |f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)| \leq$$
$$|f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

par l'inégalité du triangle.

Pour la culture : $f \cdot g$ est continue en x_0

Soit $\epsilon > 0$. Par continuité de f, g en x_0, pour tout $\epsilon' > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ avec $|x - x_0| \leq \delta$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon' \quad \text{et} \quad |g(x) - g(x_0)| \leq \epsilon'.$$

Fixons un tel $\epsilon' > 0$ (que l'on choisira plus tard en fonction de ϵ), et le $\delta > 0$ correspondant. On a alors pour tout $x \in I$ avec $|x - x_0| \leq \delta$,

$$|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)| = |f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)| =$$
$$|(f(x) - f(x_0)) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)| =$$
$$|(f(x) - f(x_0)) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot (g(x) - g(x_0))| \leq$$
$$|f(x) - f(x_0)| \cdot |g(x)| + |f(x_0)| \cdot |g(x) - g(x_0)| \leq \epsilon'(|g(x)| + |f(x_0)|)$$

par l'inégalité du triangle.

Pour la culture : $f \cdot g$ est continue en x_0

Il nous reste à montrer que pour $\epsilon' > 0$ suffisamment petit, on a que pour tout $x \in I$ avec $|x - x_0| \leq \delta$,

$$\epsilon'(|g(x)| + |f(x_0)|) \leq \epsilon.$$

Par le choix de δ, on a que pour tout x comme ci-dessus,

$$|g(x) - g(x_0)| \leq \epsilon'.$$

On a alors par l'inégalité du triangle

$$\epsilon'(|g(x)| + |f(x_0)|) \leq \epsilon'(\epsilon' + |g(x_0)| + |f(x_0)|).$$

On choisit alors ϵ' du sorte à ce que $\epsilon'(\epsilon' + |g(x_0)| + |f(x_0)|) \leq \epsilon$.

Pour la culture : λf est continue en x_0

La fonction constante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par $x \mapsto \lambda$ est continue. Par la point précédent, le produit de fonctions continues est continue, ce qui donne le résultat voulu.

Pour la culture : $\frac{1}{f}$ est continue en x_0

Si $f(x_0) \neq 0$, on a $|f(x_0)| > 0$. Par continuité de f en x_0, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$ avec $|x - x_0| \leq \alpha$,

$$|f(x) - f(x_0)| \geq |f(x_0)|/2 > 0.$$

En particulier,

$$|f(x)| \geq |f(x_0)| - |f(x_0)|/2 = |f(x_0)|/2 > 0.$$

Donc $f(x) \neq 0$ pour $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I$ et donc $\frac{1}{f}$ est bien définie sur cet intervalle et satisfait $f(x) \geq |f(x_0)|/2$.

Pour la culture : $\frac{1}{f}$ est continue en x_0

Montrons que $\frac{1}{f}$ est continue en x_0. Comme f est continue en x_0, pour tout $\epsilon' > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I$ avec $|x - x_0| \leq \delta$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon'.$$

On a alors que pour de tels x,

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}\right| = \frac{1}{|f(x)f(x_0)|}\left|f(x_0) - f(x)\right| \leq \frac{2}{|f(x_0)|^2}\left|f(x_0) - f(x)\right| \leq \frac{2}{|f(x_0)|^2}\epsilon'$$

(car $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I$). En prenant ϵ' tel que $\frac{2}{|f(x_0)|^2}\epsilon' \leq \epsilon$, on obtient le résultat voulu.

Application : les polynômes sont continus

Comme application du théorème précédent, on obtient

Theorem

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, *et* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la fonction polynômiale*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Alors, p *est continue.*

Preuve, étape 1 : $x \mapsto x^k$ est continue

On commence par montrer que pour tout $k \geq 0$, la fonction $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f_k(x) = x^k$ est continue.

On procède par récurrence sur k. On a déjà vu que c'est vrai pour $k = 0, 1, 2$, ce qui donne l'initialisation. On montre le pas de récurrence. Supposons que f_k est continue. On a aussi que f_1 est continue. Mais $f_{k+1} = f_k \cdot f_1$. Donc, f_{k+1} est continue car c'est le produit de deux fonctions continues.

Preuve, étape 2 : $x \mapsto cx^k$ est continue

On montre que pour tout $k \geq 0$, $c \in \mathbb{R}$, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = cx^k$ est continue.

On a montré que $x \mapsto x^k$ est continue. f est alors le produit d'une fonction continue par un nombre, elle est donc continue.

Preuve, étape 3 : $x \mapsto p(x)$ est continue

On montre finalement l'énoncé du théorème.

On procède par récurrence sur le degré de p (noté n). Pour $n = 0$, p est une fonction constante, donc continue. Ceci donne le pas d'initialisation. On montre le pas de récurrence. Si p a degré $n + 1$,

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k = a_{n+1} x^{n+1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}_{=:q(x)}$$

q est alors un polynôme de degré n qui est continue par l'hypothèse de récurrence.

p est la somme de q et d'un monôme, dont on a montré la continuité dans les étapes 1 et 2. p est la somme de deux fonctions continues, et est donc continue.

Continuité de fonction définies par des séries

Theorem

Soient $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. *Soit* $r > 0$. *Supposons que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty.$$

Alors, la fonction $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$ *donnée par*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

est bien définie et continue.

Preuve

Le fait que f soit bien définie suit de la convergence absolue de la série pour tout $x \in [-r, r]$.

On montre qu'elle est continue. Pour tout $n \geq 0$, on introduit les fonctions $A_n, B_n : [-r, r] \to \mathbb{R}$ données par

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \qquad B_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k.$$

Comme toutes les séries converges absolument, $A_n + B_n = f$ pour tout n.

Preuve

Soit $x \in [-r, r]$. On montre la continuité en x. Soit $\epsilon > 0$. On peut montrer qu'il existe $n_0 \geq 0$ tel que

$$\sup_{y \in [-r,r]} |B_n(y)| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

pour tout $n \geq n_0$ (voir slides suivants).

Maintenant, A_{n_0} est un polynôme, qui est donc continu. On peut alors trouver $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in [-r, r]$ avec $|y - x| \leq \delta$,

$$\left|A_{n_0}(y) - A_{n_0}(x)\right| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Preuve

Par l'inégalité du triangle, on obtient que pour tout $y \in [-r, r]$ avec $|y - x| \leq \delta$,

$$|f(x) - f(y)| = \left|B_{n_0}(x) + A_{n_0}(x) - A_{n_0}(y) - B_{n_0}(y)\right|$$
$$\leq \left|B_{n_0}(x)\right| + \left|A_{n_0}(x) - A_{n_0}(y)\right| + \left|B_{n_0}(y)\right| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Donc f est continue en x.

Preuve de la première majoration

On a que pour tout $y \in [-r, r]$,

$$|B_n(y)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k||y|^k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k.$$

Mais on sait que $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k =: C \in \mathbb{R}$, et que

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| r^k \xrightarrow{n \to \infty} C.$$

En particulier, il existe $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{\epsilon}{3} \geq \left| C - \sum_{k=0}^{n} |a_k| r^k \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k,$$

ce qui est la majoration voulue.

Application

On obtient que la fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue ! De même pour les fonctions sinus et cosinus.

Composition de fonctions continues

Theorem

Soit $I, J \subset \mathbb{R}$ *deux intervalles. Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $g : J \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues telles que* $f(I) \subset J$*. Alors, leur composition*

$$g \circ f : I \to \mathbb{R}, \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

est continue.

Composition de fonctions continues, preuve

Soit $x_0 \in I$. Montrons que $g \circ f$ est continue en x_0.

Soit $\epsilon > 0$.

- comme g est continue en $f(x_0)$ (g continue sur J et $f(x_0) \in J$), il existe $\delta' > 0$ tel que pour tout y avec $|y - f(x_0)| \leq \delta'$, $|g(y) - g(f(x_0))| \leq \epsilon$;
- comme f est continue en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout x avec $|x - x_0| \leq \delta$, $|f(x) - f(x_0)| \leq \delta'$.

On a alors que pour tout x tel que $|x - x_0| \leq \delta$, $|f(x) - f(x_0)| \leq \delta'$ et donc

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)| = |g(f(x)) - g(f(x_0))| \leq \epsilon.$$

Continuité à gauche et à droite

Definition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $x \in I$. On dit que f est

- *continue à droite en* x si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in I$ avec $y \geq x$, $|y - x| \leq \delta$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \epsilon,$$

- *continue à gauche en* x si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in I$ avec $y \leq x$, $|y - x| \leq \delta$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

Exemple

On regarde les fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ données par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Est-ce qu'elles sont continues à droite/gauche en 0 ?

Remarque

On a que $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en $x_0 \in I$ si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en x_0.

Quelques familles de fonctions

Observation

La continuité est une propriété *locale* : pour que $f : I \to \mathbb{R}$ soit continue en $x_0 \in I$, il faut regarder comment se comporte $f(x)$ pour des x *infiniment proches* de x_0.

En particulier, on remarque que si on a $f : I \to \mathbb{R}$, $a < b$ avec $(a, b) \subset I$, et $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continue, alors $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en tout point de (a, b).

Que peut-on dire si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue ? Et pour $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ et $f : (a, b] \to \mathbb{R}$?

On va voir comment cette propriété de “localité” peut être combinée avec des symétries pour déduire la continuité d’une fonction.

Fonctions paires, impaires

Definition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que

- f est *paire* si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$,
- f est *impaire* si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.

Notons que si f est impaire, $f(0) = 0$ car $f(0) = f(-0) = -f(0)$ car $0 = -0$.

Parité et continuité

Theorem

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction paire ou impaire. Supposons que la fonction* $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *donnée par* $g(x) = f(x)$ *soit continue (*g *est la restriction de* f *à* $\mathbb{R}_+$*). Alors* f *est continue.*

Preuve du cas f impaire

On procède en trois étapes :

(1) on montre que pour tout $x \in (0, +\infty)$ f est continue en x,

(2) on montre que pour tout $x \in (-\infty, 0)$ f est continue en x,

(3) on montre que f est continue en 0.

Preuve du cas f impaire, (1)

Soit $x_0 \in (0, +\infty)$. Montrons que f est continue en x_0.

Soit $\epsilon > 0$. Comme g est continue en x_0, il existe $\delta' > 0$ tel que pour tout $x \in [0, +\infty)$ avec $|x_0 - x| \leq \delta'$, $|g(x) - g(x_0)| \leq \epsilon$.

Posons $\delta = \min(\delta', |x_0|)$. On a alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x_0 - x| \leq \delta$, $x \in [0, +\infty)$. Ceci nous donne que pour $|x_0 - x| \leq \delta$,

$$|f(x) - f(x_0)| = |g(x) - g(x_0)| \leq \epsilon$$

car $|x_0 - x| \leq \delta \leq \delta'$.

Preuve du cas f impaire, (2)

Soit $x_0 \in (-\infty, 0)$. Montrons que f est continue en x_0.

Soit $\epsilon > 0$. Comme g est continue en $-x_0$, il existe $\delta' > 0$ tel que pour tout $y \in [0, +\infty)$ avec $|x_0 - y| \leq \delta'$, $|g(y) - g(x_0)| \leq \epsilon$.

Posons $\delta = \min(\delta', |x_0|)$. On a alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x_0 - x| \leq \delta$, $-x \in [0, +\infty)$. Ceci nous donne que pour $|x_0 - x| \leq \delta$,

$$|f(x) - f(x_0)| = |-f(-x) + f(-x_0)| = |g(-x) - g(-x_0)| \leq \epsilon$$

car $|-x_0 - (-x)| = |x_0 - x| \leq \delta \leq \delta'$.

Preuve du cas f impaire, (3)

Montrons la continuité en 0.

Soit $\epsilon > 0$. Comme g est continue en 0, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in [0, \delta]$, $|g(y) - g(0)| \leq \epsilon$.

On a alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| \leq \delta$,

$$|f(x) - f(0)| = \begin{cases} |g(x) - g(0)| \leq \epsilon & \text{si } x \geq 0, \\ |-g(-x) + g(0)| \leq \epsilon & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Quelques propriétés des fonctions paires et impaires

Theorem

Soient $p_1, p_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *deux fonctions paires,* $q_1, q_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *deux fonctions impaires et* $f \colon p_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *une fonction. Alors,*

- $p_1 + p_2$, $p_1 \cdot p_2$ *et* $q_1 \cdot q_2$ *sont paires ;*
- $q_1 + q_2$ *et* $p_1 \cdot q_1$ *sont impaires ;*
- $q_1 \circ q_2$ *est impaire ;*
- $p_1 \circ q_1$ *est paire ;*
- $f \circ p_1$ *est paire.*

Preuve dans la série 8.

Fonctions périodiques

Definition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $T \in \mathbb{R}^*$. On dit que f est *T-périodique* si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$. De façon équivalente, f est T-périodique si et seulement si $f(x+nT) = f(x)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

EXEMPLES : sin et cos sont 2π-périodiques.

Périodicité et continuité

Theorem

*Soit $T \in \mathbb{R}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique. Alors f est continue si et seulement si $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ (la restriction de f à une période **fermée**) est continue.*

Qu'est-ce qui peut rater si on demande seulement $f : [0, T) \to \mathbb{R}$ continue ?

Preuve similaire à celle du Théorème sur la continuité des fonctions paires et impaires.

Limites de fonctions et extension par continuité

Un problème comme motivation

On regarde la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Est-ce qu'elle est continue en 0 ? Si on la regarde comme fonction $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, est-elle continue ? et comme fonction de $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$?

Un problème comme motivation

On peut voir $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ comme la fonction définie par morceaux

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x^2 & \text{si } x \in (0, +\infty) \\ f_2(x) = x^2 & \text{si } x \in (-\infty, 0) \end{cases},$$

avec $f_1 : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f_2 : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ continues. Comment "compléter" f de sorte à la rendre continue sur tout $\mathbb{R}$?

Point d'accumulation

Definition

Soit $E \subset \mathbb{R}$. $x \in \mathbb{R}$ est un *point d'accumulation* de E si il existe une suite $a_n \in E, n \geq 1$ telle que

- $(a_n)_{n \geq 1}$ converge vers x ($a_n \to x$),
- $a_n \neq x$ pour tout n.

En mots : un point d'accumulation d'un ensemble E est un point dont on peut s'approcher arbitrairement près *sans le toucher* en restant dans l'ensemble E. Notez que le point d'accumulation n'appartient pas forcément à l'ensemble.

Point d'accumulation : exemples

Quels sont les points d'accumulations des ensembles suivants :

(a) $E = (0, 1)$?

(b) $E = \{0, 2, 5\}$?

(c) $E = \mathbb{N}$?

(d) $E = \mathbb{Q}$?

(e) $E = [0, 1]$?

Ne pas confondre

On regarde ici les points d'accumulation d'un **ensemble** et non d'une **suite**. Pour une suite, les points d'accumulations sont toutes les limites de sous-suite convergentes :

Definition

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite. $x \in \mathbb{R}$ est un *point d'accumulation de* $(a_n)_{n\geq 1}$ si il existe une *sous-suite* de $(a_n)_{n\geq 1}$ qui converge vers x :

$$\exists n_1 < n_2 < \ldots, \ (a_{n_k})_{k\geq 1} \text{ converge vers } x.$$

On a déjà rencontré (implicitement) le concept de point d'accumulation pour des suites : pour démontrer qu'une suite ne converge pas, on peut montrer qu'elle possède au moins deux points d'accumulation distincts.

Par exemple,

- $a_n = (-1)^n$,
- $a_n = \sin(\pi n/8)$,

possèdent toutes deux -1 et 1 comme points d'accumulation.

Voir slide suivant pour comment formaliser ceci en général.

Si $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite et que l'on peut trouver $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ et $(a_{m_k})_{k\geq 1}$ deux sous-suites telles que

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = b < c = \lim_{k\to\infty} a_{m_k}.$$

On a alors que par convergence de $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ et $(a_{m_k})_{k\geq 1}$, on peut trouver $k_0 \geq 1$ tel que pour tout $k \geq k_0$,

$$|a_{n_k} - b| \leq \alpha, \qquad |a_{m_k} - c| \leq \alpha,$$

où $\alpha = (c-b)/4$. Ce qui implique que pour $k \geq k_0$,

$$a_{n_k} \leq b + \alpha, \qquad a_{m_k} \geq c - \alpha.$$

En particulier, pour tout $k \geq k_0$

$$|a_{m_k} - a_{n_k}| \geq a_{m_k} - a_{n_k} \geq c - \alpha - b - \alpha = (c-b)/2 > 0,$$

ce qui implique que $(a_n)_{n\geq 1}$ n'est pas de Cauchy.

Limite de fonction en un point d'accumulation

Definition

Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction et $x \in \mathbb{R}$ un point d'accumulation de E. On dit que f *admet une limite en* x si il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in E$ satisfaisant $0 < |y - x| \leq \delta$,

$$|L - f(y)| \leq \epsilon.$$

L est alors appelée *la limite de* f *en* x. On notera alors

$$\lim_{y \to x} f(y) = L.$$

Exemples

Est-ce que les fonctions suivantes admettent des limites en x_0 ?
Si oui, quelle est la limite ?

(a) $x_0 = 0$, $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$;

(b) $x_0 = 0$, $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$;

(c) $x_0 = 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases};$$

(d) $x_0 = 1$, $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 - x)^{-1}$;

(e) $x_0 = -1$, $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 - x)^{-1}$;

(f) $x_0 = 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Limite de fonction en un point d'accumulation

ATTENTION no 1 : il n'est pas vrai en général que $\lim_{y \to x} f(y) = f(x)$. La caractérisation de la continuité par les suites nous dit que $\lim_{y \to x} f(y) = f(x)$ si et seulement si f est continue en x.

ATTENTION no 2 : pour écrire "$\lim_{y \to x} f(y) = L$" il **ne suffit pas** de trouver **une** suite $(x_n)_{n \geq 1}$ qui converge vers x telle que $f(x_n) \to L$.

Divergence vers $\pm\infty$

Definition

Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction et $x \in \mathbb{R}$ un point d'accumulation de E. On dit que f *diverge vers* $+\infty$ *(*$-\infty$*) en* x si pour tout $R > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in E$ satisfaisant $0 < |y - x| \leq \delta$,

$$f(y) \geq R \quad (\leq -R).$$

On notera alors

$$\lim_{y \to x} f(y) = +\infty \quad (-\infty).$$

Limite de fonction en $\pm\infty$

Definition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f *admet une limite en* $+\infty$ si il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $R \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geq R$,

$$|L - f(x)| \leq \epsilon.$$

L est alors appelée *la limite de* f *en* $+\infty$. On notera alors

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L.$$

Limite de fonction en $\pm\infty$

De la même manière, on définit

Definition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f *admet une limite en* $-\infty$ si il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $R \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \leq R$,

$$|L - f(x)| \leq \epsilon.$$

L est alors appelée *la limite de f en* $-\infty$. On notera alors

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

Limite de fonction en $\pm\infty$

Definition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f *diverge vers* $+\infty$ *(*$-\infty$*) en* $+\infty$ si pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe $R \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geq R$,

$$f(x) \geq s \quad (f(x) \leq s).$$

On notera alors

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty(-\infty).$$

De la même manière

Definition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f *diverge vers* $+\infty$ *(*$-\infty$*) en* $-\infty$ si pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe $R \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \leq R$,

$$f(x) \geq s \quad (f(x) \leq s).$$

On notera alors

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty(-\infty).$$

Limites de fonctions : propriétés

Theorem

Soit $E \subset \mathbb{R}$ *un ensemble. Soit* $x_0 \in \mathbb{R}$ *un point d'accumulation de* E*. Soient* $f, g : E \to \mathbb{R}$ *deux fonctions qui admettent des limites en* x_0*. Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Alors*

- $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$;
- $\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = \big(\lim_{x\to x_0} f(x)\big)\cdot\big(\lim_{x\to x_0} g(x)\big)$;
- $\lim_{x\to x_0}(\lambda f)(x) = \lambda\big(\lim_{x\to x_0} f(x)\big)$;
- *si* $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, $\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$;

Notations : $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$, $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$, $(f\cdot g)(x) := f(x)g(x)$, $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$.

On ne prouvera pas ce théorème. Ce résultat est l'analogue "fonctions" des résultats de convergences pour les sommes, produit etc. de suites.

Extension par continuité en un point

La notion de limite de fonctions nous permet de voir notre exemple de "compléter la fonction en un point pour la rendre continue sur un domaine plus grand" dans un cadre plus général.

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet une limite en tout point d'accumulation x de E, dénotée L_x. Si $L_x = f(x)$ quand $x \in E$, on peut définir *l'extension de f par continuité* via

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E, \\ L_x & \text{si } x \text{ est un point d'accumulation de } E. \end{cases}$$

Extension continue de fonctions continues sur un intervalle

Comme exemple, on considère $a < b \in \mathbb{R}$ et

$$f : (a, b) \to \mathbb{R}.$$

Si f admet une limite en a et en b (notées L_a et L_b), on peut étendre f à $[a, b]$ en posant

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in (a, b), \\ L_a & \text{si } x = a, \\ L_b & \text{si } x = b. \end{cases}$$

$\tilde{f}$ est alors continue en a et en b.

Extrema de fonctions continues

Pour la culture : Bolzano-Weierstrass

Theorem

Toute suite à valeurs réelles bornée admet une sous-suite convergente.

Sans preuve. Idée de la preuve pour les intéressés : on extrait une sous-suite qui converge vers la $\limsup$ de la suite en utilisant la caractérisation alternative du supremum vue au début du cours.

Extrema de fonctions continues

Theorem

Soient $a < b \in \mathbb{R}$. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction* ***continue***.
Alors, f *est bornée et il existe* $x_+, x_- \in [a, b]$ *tels que*

$$\sup f = f(x_+), \quad \inf f = f(x_-).$$

En d'autres mots, $\max f$ *et* $\min f$ *sont bien définis.*

Est-ce que le résultat est vrai si $[a, b]$ est remplacé par (a, b) ?

Divergence au bord

On regarde le cas suivant : $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, donnée par

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

On a alors que la fonction f n'est pas majorée car $f(x)$ diverge quand x tend vers 0.

Morale : pour les fonctions continues définies sur un intervalle, les problèmes surviennent aux bords !

Pour la culture : une partie de la preuve

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On montre que f est majorée. On va raisonner par l'absurde et utiliser Bolzano-Weierstrass.

Par l'absurde, supposons que f n'est pas majorée. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) \geq n$.

La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ étant à valeurs dans $[a, b]$, elle est majorée par b et minorée par a. Elle est donc bornée. Par Bolzano-Weierstrass, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ admet une sous-suite convergente, notons la $(x_{n_k})_{k\geq 1}$. Notons $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ la limite de cette sous-suite. Comme $a \leq x_{n_k} \leq b$ pour tout k, $x \in [a, b]$.

Pour la culture : une partie de la preuve

D'un côté, comme f est continue, donc

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f\Big(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\Big) = f(x) \in \mathbb{R},$$

car $x \in [a, b]$ qui est le domaine de définition de f.

D'un autre côté, par construction de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$, on a que $f(x_{n_k}) \geq n_k$ pour tout k. Donc,

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \geq \lim_{k\to\infty} n_k = +\infty,$$

ce qui amène à une contradiction. Notre hypothèse de départ, "f n'est pas majorée" est donc fausse, et f est donc majorée.

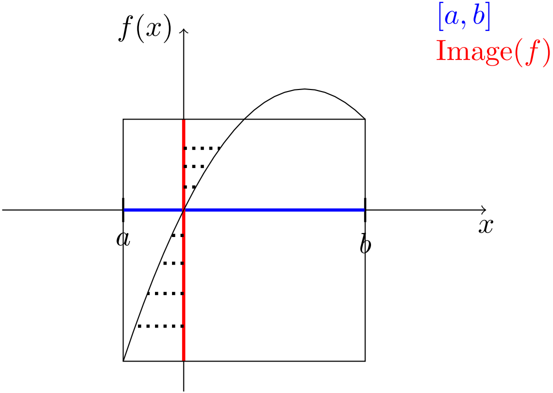
Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires

Theorem

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ *et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors, pour tout* y *entre* $f(a)$ *et* $f(b)$*, il existe* $x \in [a, b]$ *tel que* $f(x) = y$.

“Preuve par l’image”



Pour la culture : preuve du Théorème

On traite le cas $f(a) \leq f(b)$. Soit $y \in [f(a), f(b)]$. On cherche $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

On va construire deux suites $(u_n)_{n\geq 1}, (v_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $[a, b]$ telles que

- $u_n \leq v_n$ pour tout n,
- $|v_n - u_n| \leq (b-a)2^{1-n}$
- $f(u_n) \leq y \leq f(v_n)$ pour tout n,
- $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante et $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante,
- $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ vont converger vers le point x voulu.

Pour la culture : preuve du Théorème

On va construire les deux suites par récurrence : on pose $u_1 = a, v_1 = b$. On a bien que

- $u_1 \leq v_1$,
- $|v_1 - u_1| = b - a$,
- $f(u_1) = f(a) \leq y \leq f(b) = f(v_1)$.

Pour la culture : preuve du Théorème

Si u_n, v_n sont définis et satisfont $u_n \leq v_n$, $|v_n - u_n| \leq (b-a)2^{1-n}$, $f(u_n) \leq y \leq f(v_n)$, on pose $w_n = \frac{u_n+v_n}{2}$ le point milieu entre u_n et v_n, et on définit

$$u_{n+1} = \begin{cases} w_n & \text{si } f(w_n) \leq y \\ u_n & \text{si } f(w_n) > y \end{cases}, \quad v_{n+1} = \begin{cases} w_n & \text{si } f(w_n) > y \\ v_n & \text{si } f(w_n) \leq y \end{cases}.$$

On a alors bien que

- $u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$,
- $|u_{n+1} - v_{n+1}| = |u_n - v_n| \leq (b-a)2^{-n}$,
- $f(u_{n+1}) \leq y \leq f(v_{n+1})$,

ce qui donne les quatres premières propriétés voulues.

Pour la culture : preuve du Théorème

On montre maintenant que ces deux suites convergent vers la même limite.

$(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée par b, donc elle converge. Notons $u_n \to u$.

$(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée par a, donc elle converge. Notons $v_n \to v$.

Comme $v_n \geq u_n$ pour tout n, $v \geq u$.

Pour la culture : preuve du Théorème

Montrons que $u = v$. Par monotonicité, pour tout $n \geq 1$, on a

$$|u - v| = v - u \leq v_n - u_n \leq (b - a)2^{1-n}.$$

On a alors que comme $(b-a)2^{1-n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $|u - v|$ est plus petit que n'importe quel nombre positif et est donc $= 0$.

Donc

$$u = v =: x.$$

Pour la culture : preuve du Théorème

On montre finalement que $f(x) = y$ comme voulu. Comme f est continue et $u_n \to x$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(u_n) \leq y,$$

et, comme $v_n \to x$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(v_n) \geq y.$$

Donc $f(x) \leq y$ et $f(x) \geq y$, d'où $f(x) = y$.

Remarque

La preuve nous donne un algorithme pour trouver un point x qui satisfait $f(x) = y$!

Application : point fixe de Brouwer

Une conséquence directe du Théorème des valeurs intermédiaires est

Theorem

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ *une fonction continue. Alors, il existe* $x \in [0,1]$ *tel que* $f(x) = x$.

Application : point fixe de Brouwer, preuve

Si $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$, le résultat est directement vrai.
Supposons que $f(0) > 0$ et $f(1) < 1$.

On regarde alors $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$. g est continue (somme de fonctions continues). On cherche alors $x \in [0,1]$ tel que $g(x) = 0$.

Mais comme $f(0) > 0$ et $f(1) < 1$, $g(0) > 0$ et $g(1) < 0$. Donc 0 est un nombre entre $g(0)$ et $g(1)$.

Le Théorème des valeurs intermédiaires nous dit donc qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $g(x) = 0$, ce qui est le résultat voulu.

Applications

En général, on applique le Théorème des valeurs intermédiaires (souvent abrégé TVI) pour montrer qu'il existe des solutions à des équations de la forme $f(x) = g(x)$ pour $x \in [a, b]$ et f, g continues.

De plus, comme la preuve vue est algorithmique, on peut l'utiliser pour trouver des (approximations de) solutions à ces équations.

Continuité et bijectivité

Fonctions monotones et bijectivité

Theorem

Soit $E \subset \mathbb{R}$ *et* $f : E \to \mathbb{R}$ *une fonction strictement croissante : pour tous* $x, y \in E$, *si* $x < y$ *alors* $f(x) < f(y)$. *Alors* $f : E \to f(E)$ *est bijective, et sa réciproque,* $f^{-1} : f(E) \to E$, *est strictement croissante.*

Le même énoncé est vrai en remplaçant "strictement croissante" par "strictement décroissante" (pour tous $x, y \in E$, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$).

Preuve du théorème

On montre que $f : E \to f(E)$ est bijective.

On commence par remarquer que par choix du co-domaine, f est surjective (chaque point du co-domaine et atteint).

On montre ensuite que f est injective (si $x \neq y$, alors $f(x) \neq f(y)$). Soient $x, y \in E$ tels que $x \neq y$. Alors, soit $x < y$ et donc $f(x) < f(y)$ ce qui entraine $f(x) \neq f(y)$, soit $x > y$ et donc $f(x) > f(y)$ et donc $f(x) \neq f(y)$.

Preuve du théorème

On montre finalement que $f^{-1} : f(E) \to E$ est strictement croissante.

Soient $x < y \in f(E)$. Alors, il existe $u, v \in E$ tels que $u \neq v$ et $f(u) = x, f(v) = y$. Comme $u \neq v$, on sait que soit $u < v$, soit $v < u$. Comme $f(u) = x < y = f(v)$, et f est strictement croissante, $v < u$ est impossible (car cela impliquerait que $f(v) < f(u)$). Donc $u < v$.

On a alors que

$$f^{-1}(x) = f^{-1}(f(u)) = u < v = f^{-1}(f(v)) = f^{-1}(y),$$

ce qui est la monotonicité voulue.

Fonctions monotones et bijectivité

Theorem

Soit $a < b \in \mathbb{R}$ *et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction* ***continue*** *et* ***strictement croissante****. Alors,* $f : [a, b] \to f([a, b])$ *est bijective, sa réciproque est continue, et* $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$*.*

Le même énoncé est vrai en remplaçant “strictement croissante” par “strictement décroissante”.

Fonctions monotones et bijectivité : cas général

Theorem

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction ***continue*** *et* ***strictement croissante****. Alors, $f : I \to f(I)$ est bijective, sa réciproque est continue, $f(I)$ est un intervalle qui est donné par :*

$$f(I) = \begin{cases} [L_a, L_b] & \text{si } I = [a, b] \\ (L_a, L_b] & \text{si } I = (a, b] \\ [L_a, L_b) & \text{si } I = [a, b) \\ (L_a, L_b) & \text{si } I = (a, b) \end{cases},$$

avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ($\pm\infty$ autorisé dans les cas (semi-)ouverts), et $L_a = \lim_{x \to a} f(x)$, $L_b = \lim_{x \to b} f(x)$.

Fonctions monotones et bijectivité : cas général

REMARQUE 1 : Par le résultat précédent, $f : I \to f(I)$ est bijective car strictement croissante.

REMARQUE 2 : Notons que les limites sont bien définies (possiblement $\pm\infty$) par monotonicité de f, et que dans le cas $I = [a, b]$, $L_a = f(a)$, $L_b = f(b)$ par continuité de f.

Pour la culture : preuve du théorème dans le cas $I = [a, b]$

Par le résultat précédent, $f : I \to f(I)$ est bijective car strictement croissante.

Montrons que $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. On procède par double inclusions.

Pour la culture : preuve du théorème dans le cas $I = [a, b]$

On montre que $f([a, b]) \subset [f(a), f(b)]$.

Soit $y \in f([a, b])$. Alors, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$. On a alors que comme f est croissante, et $a \leq x \leq b$,

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b),$$

et donc $y = f(x) \in [f(a), f(b)]$. D'où $f([a, b]) \subset [f(a), f(b)]$.

Pour la culture : preuve du théorème dans le cas $I = [a, b]$

On montre finalement que $[f(a), f(b)] \subset f([a, b])$.

Soit $y \in [f(a), f(b)]$. Alors, par le Théorème de valeurs intermédiaires, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$. On a alors que

$$y = f(x) \in f([a, b])$$

par définition de l'ensemble image de f. D'où $[f(a), f(b)] \subset f([a, b])$.

Pour la culture : preuve du théorème dans le cas $I = [a, b]$

Il reste à montrer que la réciproque de f, $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$, est continue. Soit $y \in [f(a), f(b)]$. Montrons que f^{-1} est continue en y. Notons $x = f^{-1}(y)$.

Soit $\epsilon > 0$. Prenons $\delta = \min(f(x+\epsilon) - f(x), f(x) - f(x-\epsilon)) > 0$ car f est strictement croissante. On a alors que pour tout $y' \in [y - \delta, y + \delta]$ (i.e. : tout y tel que $|y - y'| \leq \delta$),

$$\left|f^{-1}(y) - f^{-1}(y')\right| = \begin{cases} f^{-1}(y) - f^{-1}(y') \leq x - f^{-1}(f(x-\epsilon)) = \epsilon & \text{si } y \geq y' \\ f^{-1}(y') - f^{-1}(y) \leq f^{-1}(f(x+\epsilon)) - x = \epsilon & \text{si } y \geq y' \end{cases},$$

car dans le premier cas $y' \geq y - \delta \geq y - f(x) + f(x-\epsilon) = f(x-\epsilon)$ et dans le second, $y' \leq y + \delta \leq y + f(x) - f(x+\epsilon) = f(x+\epsilon)$.

Application 1 : $x \mapsto x^2$

$f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$: on a déjà vu que f est continue. On montre que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$: soit $0 \leq x < y$,

$$y^2 - x^2 = (y + x)(y - x) > 0,$$

car $x + y \geq y > 0$ et $y - x > 0$ (car $y > x \geq 0$). On obtient que f est une bijection entre $[0, +\infty)$ et $f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$.

Application 2 : $x \mapsto e^x$

$\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $\exp(x) = e^x$: on a vu que cette fonction est continue, on montre que exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: soit $x < y$,

$$e^y - e^x = e^x(e^{y-x} - 1) > 0,$$

car si $\delta > 0$,

$$e^\delta - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta^k}{k!} \geq \delta > 0.$$

On obtient que exp est une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\exp(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$.

Application 3 : $x \mapsto \ln(x)$

Comme $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ est bijective et continue, sa réciproque, ln, est bijective et continue. De plus, comme exp est strictement croissante, ln est aussi strictement croissante.

En particulier, comme $\mathrm{Image}(\ln) = \mathbb{R}$, on obtient que

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty.$$

Notions plus fortes de continuité

Continuité uniforme

Definition

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est *uniformément continue* si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ et tout $y \in I$ tel que $|x - y| \leq \delta$

$$|f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

La différence avec la continuité usuelle est que dans le cas de la continuité usuelle en un point x, δ est autorisé à dépendre du point x.

Continuité uniforme : exemple 1

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = 3x + 2$ est uniformément continue : si $|x - y| \leq \delta$,

$$|f(x) - f(y)| = |3x - 3y| = 3|x - y| \leq 3\delta.$$

On peut donc prendre $\delta = \delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{3}$ dans la définition.

Continuité uniforme : exemple 2

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue : on a

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y| \cdot |x - y|.$$

Si on prend $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ et que l'on suppose $\frac{\delta}{2} \leq |x - y| \leq \delta$, on a que pour $x, y > 0$ assez grands (p. ex. : $x, y \geq \frac{10\epsilon}{\delta}$),

$$|f(x) - f(y)| \geq \frac{\delta}{2}|x + y| \geq 10\epsilon > \epsilon.$$

On ne peut donc pas trouver de $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que $|x - y| \leq \delta$ implique $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$.

Versions quantitatives de la continuité

Definition

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $C > 0$. On dit que f est C-*lipschitzienne* si pour tout $x, y \in I$,

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|.$$

En prenant $\delta = \epsilon/C$, on obtient que C-lipschitzienne implique uniformément continue.

Versions quantitatives de la continuité

On peut généraliser cette notion.

Definition

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $C > 0, \alpha > 0$. On dit que f est (α, C)-*höldérienne* si pour tout $x, y \in I$,

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}.$$

En prenant $\delta = (\epsilon/C)^{1/\alpha}$, on obtient que (α, C)-höldérienne implique uniformément continue.

Application : calcul d'erreur

On imagine que l'on connait la masse d'un objet, $m > 0$, et que l'on mesure sa hauteur depuis le sol, h_{mes}, avec une précision $\delta = 0.01$. On calcule alors l'énergie potentielle de gravitation de l'objet via

$$E_{\text{pot}} = 9.81 \cdot \text{masse} \cdot \text{hauteur}.$$

On veut savoir à quel point la valeur obtenue peut être loin de la valeur réelle de l'énergie de l'objet.

Application : calcul d'erreur

En math : on a une fonction $E_{\text{pot}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par $E_{\text{pot}}(h) = 9.81 \cdot m \cdot h$. On sait que la hauteur réelle, h_{re}, est dans l'intervalle $[h_{\text{mes}} - \delta, h_{\text{mes}} + \delta]$. La fonction E_{pot} est $9.81m$-lipschitzienne car,

$$\left| E_{\text{pot}}(x) - E_{\text{pot}}(y) \right| = 9.81m|x - y|.$$

On obtient alors que comme $|h_{\text{re}} - h_{\text{mes}}| \leq \delta$,

$$\left| E_{\text{pot}}(h_{\text{re}}) - E_{\text{pot}}(h_{\text{mes}}) \right| \leq 9.81m\delta = 0.0981m,$$

ce qui nous donne une borne sur l'erreur commise.