Chapitre II : Suites et séries

- Suites
- Séries

Suites

Suites

Definition

Soit $E \subset \mathbb{R}$. Une *suite à valeurs dans* E est une liste de longueur infinie de nombres réels appartenant à E : $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$, $a_n \in E$ pour tout $n \geq 1$. On notera souvent

$$(a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_n)_{n\geq 1}.$$

Quand E n'est pas précisé, on prendra $E = \mathbb{R}$.

Exemples de suites à valeurs dans $E = \mathbb{N}$:

- la suite constante 0 : $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, ...
- la suite des carrés d'entiers : $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_n = n^2$.

Rappel : valeur absolue

On se rappelle la fonction $x \mapsto |x|$. C'est une fonction qui satisfait :

- $|x| \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$;
- $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Ces conditions impliquent que $\mathrm{d}(x, y) := |x - y|$ est une *distance sur* $\mathbb{R}$:

- $\mathrm{d}(x, y) \geq 0$ et $\mathrm{d}(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;
- $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$;
- pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, $\mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, y)$.

Distances

Les distances donnent une manière de mesurer la *proximité* entre deux éléments : la distance est 0 si et seulement si deux éléments sont les mêmes et on peut penser à "d(x, y) est petite" comme à "x et y sont proches".

Convergence de suites

Definition

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite à valeur dans $\mathbb{R}$. On dit que $(a_n)_{n\geq 1}$ *converge vers* $a \in \mathbb{R}$, noté $a_n \to a$, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|a_n - a| \leq \epsilon$. En écriture math :

$$a_n \to a \text{ si } \forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \ |a_n - a| \leq \epsilon.$$

On dit que *la suite* $(a_n)_{n\geq 1}$ *converge* si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $a_n \to a$.

En mots : $a_n \to a$ si la distance entre a_n et a devient petite quand n devient grand.

Exemples

- Vers quoi la suite $a_n = \frac{1}{n}$ converge-t-elle ?
- Et la suite $a_n = \sqrt{2} + \frac{1}{n^2}$?
- Est-ce que la suite $a_n = 0$ pour tout n converge ?
- Qu'en est-il de la suite $a_n = n$?

Rappel : écriture décimale

On se rappelle qu'un nombre peut s'écrire en utilisant l'écriture décimale : si $x \in [0,1)$,

$$x = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots$$

avec $b_m \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ pour tout m. On peut visualiser ceci comme suit : on partitionne $[0,1)$ en sous intervalles :

$$[0,1) = \underbrace{\left[1, \frac{1}{10}\right)}_{I_0} \cup \underbrace{\left[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right)}_{I_1} \cup \ldots \underbrace{\left[\frac{9}{10}, 1\right)}_{I_9} \ldots$$

Rappel : écriture décimale

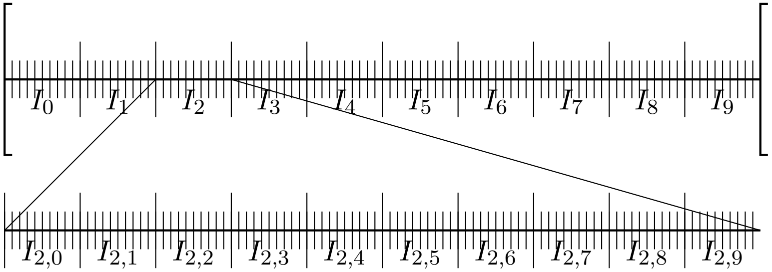
que l'on partitionne eux-mêmes en sous-intervalles : par exemple

$$I_1 = [\frac{1}{10}, \frac{2}{10}) =$$
$$\underbrace{\Big[\frac{1}{10}, \frac{1}{10} + \frac{1}{100}\Big)}_{I_{1,0}} \cup \underbrace{\Big[\frac{1}{10} + \frac{1}{100}, \frac{1}{10} + \frac{2}{100}\Big)}_{I_{1,1}} \cup \cdots \cup \underbrace{\Big[\frac{1}{10} + \frac{9}{100}, \frac{2}{10}\Big)}_{I_{1,9}},$$

et ainsi de suite.

Rappel : écriture décimale

Sur un dessin :



Rappel : écriture décimale

On a alors que si $x = 0, b_1 b_2 \ldots$, alors $x \in I_{b_1}$, mais aussi $x \in I_{b_1, b_2}$ et $x \in I_{b_1, b_2, b_3}$ etc.. Il se trouve que ces “raffinements successifs” suffisent pour retrouver x.

On peut voir ceci en utilisant la notation de somme infinie : on a (formellement du moins...)

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k 10^{-k}.$$

Par exemple, si $b_1 = 1, b_2 = 8, b_3 = 3$, l'intervalle $I_{1,8,3}$ correspond à

$$\Big[1 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3}, 1 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + 10^{-4}\Big) = \Big[\frac{183}{1000}, \frac{183}{1000} + 10^{-4}\Big).$$

Écriture décimale tronquée

Si $x \in [0, 1)$,

$$x = 0, b_1 b_2 \ldots$$

avec $b_m \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ pour tout m. On définit

$$x_1 = 0, b_1 \quad x_2 = 0, b_1 b_2 \quad x_3 = 0, b_1 b_2 b_3$$

$$x_n = 0, b_1 \ldots b_n$$

On a alors que $x_n \to x$ (au tableau).

Digression : convergence dans un ensemble

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite à valeurs dans $E \subset \mathbb{R}$. Supposons que $a_n \to a$ pour un $a \in \mathbb{R}$. Peut-on en déduire que $a \in E$?

Digression : convergence dans un ensemble

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite à valeurs dans $E \subset \mathbb{R}$. Supposons que $a_n \to a$ pour un $a \in \mathbb{R}$. Peut-on en déduire que $a \in E$?

Non ! En effet : prenons les exemples

- $a_n = 1/n$ est une suite à valeurs dans $(0,1]$ mais $a_n \to 0$ et $0 \notin (0,1]$;
- Notons $\sqrt{2} = 1.414213\ldots$ et posons $a_1 = 1.4$, $a_2 = 1.41$, $a_3 = 1.414$ etc. la suite des troncatures décimales de $\sqrt{2}$. On a alors que $a_n \in \mathbb{Q}$ pour tout n et donc $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{Q}$ qui converge vers $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Ré-indexage et convergence de suites

À partir d'une suite $(a_n)_{n\geq 1}$, on peut construire une nouvelle suite $(b_n)_{n\geq 1}$ en *ré-indexant* la suite a_n : on prend $N \in \mathbb{N}$ et on pose

$$b_n = a_{n+M}.$$

Cela correspond à regarder la suite a_n *après le rang* M. On a alors que

$$(a_n)_{n\geq 1} \text{ converge vers } a \iff (b_n)_{n\geq 1} \text{ converge vers } a.$$

On remarque que la suite b_n ne dépend que de $(a_n)_{n>M}$, *la suite* a_n *démarrée en* $M+1$.

Ré-indexage et convergence de suites

Du slide précédent, on déduit que pour n'importe quel $M \in \mathbb{N}$ *fixé*, on peut toujours oublier les M premiers termes d'une suite pour étudier sa convergence.

Divergence vers l'infini

Si une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est telle que pour tout $R \in \mathbb{R}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $a_n \geq R$, on dira que a_n *diverge vers* $+\infty$ et on notera $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ou $a_n \to +\infty$.

De la même façon, si pour tout $R \in \mathbb{R}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $a_n \leq R$, on dira que a_n *diverge vers* $-\infty$ et on notera $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ou $a_n \to -\infty$.

Suites bornées

Definition

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que $(a_n)_{n\geq 1}$ est

- *majorée* si l'ensemble $\{a_n : \ n \geq 1\}$ l'est,
- *minorée* si l'ensemble $\{a_n : \ n \geq 1\}$ l'est,
- *bornée* si elle est majorée et minorée.

Suites bornées

Theorem

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ *une suite à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *Si elle est convergente, alors elle est bornée.*

Preuve au tableau. Idée : $a_n \to a$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\{a_n : \ n \geq n_0\} \subset [a-1, a+1]$.

Critères de convergence de suites

On verra un certain nombre de critères, listés ici.

- Suites monotones bornées
- Limsup et liminf
- Opérations sur les suites
- Théorème des gendarmes
- Suites de Cauchy

Suites monotones bornées

Theorem

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ *une suite à valeurs dans* $\mathbb{R}$*. Supposons que*

- $(a_n)_{n\geq 1}$ *est majorée,*
- $a_{n+1} \geq a_n$ *pour tout* $n \geq 1$.

Alors, $(a_n)_{n\geq 1}$ *converge vers* $a = \sup\{a_n : \ n \geq 1\}$.

Preuve au tableau.
Idée : utiliser la caractérisation $x = \sup A$ si et seulement si x est un majorant de A et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $y \in A$ tel que $y \geq x - \epsilon$.

Suites monotones bornées

On a le résultat symétrique pour les suites minorées :

Theorem

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ *une suite à valeurs dans* $\mathbb{R}$*. Supposons que*

- $(a_n)_{n\geq 1}$ *est minorée,*
- $a_{n+1} \leq a_n$ *pour tout* $n \geq 1$*.*

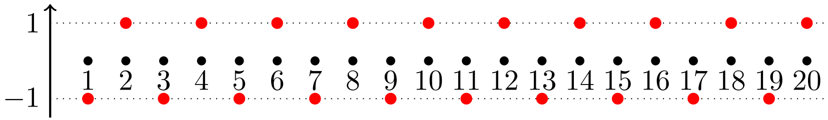
Alors, $(a_n)_{n\geq 1}$ *converge vers* $a = \inf\{a_n : \ n \geq 1\}$*.*

Limsup et liminf

Prenons la suite :

$$a_n = (-1)^n.$$

Sur un dessin :



Cette suite ne converge pas, mais on voit qu'elle oscille entre $+1$ et -1. On peut penser à $+1$ comme la "valeur limite supérieure" et à -1 comme la "valeur limite inférieure".

Limsup et liminf

Ceci est formalisé dans la notion suivante.

Definition

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite à valeurs réelles. On définit la *limite supérieure* (ou *limsup*) et la *limite inférieure* (ou *liminf*) de la suite par

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sup\{a_m : m \geq n\},$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \inf\{a_m : m \geq n\}.$$

En mots, la limsup est le "plus grand nombre dont la suite s'approche infiniment souvent" et la liminf le "plus petit nombre dont la suite s'approche infiniment souvent".

Limsup et liminf

Au tableau : ces notions sont bien définies si a_n est bornée.

Par convention, si a_n n'est pas majorée, on notera $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$. De la même façon, si a_n n'est pas minorée, on notera $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Aussi par convention : si a_n diverge vers $+\infty$, on pose $\liminf_{n\to\infty} a_n = +\infty$ et si elle diverge vers $-\infty$, on pose $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Limsup et liminf, notation

On utilisera aussi les notations équivalentes

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} a_m = \inf\{\sup_{m\geq n} a_m : \ n \geq 1\} = \inf_{n\geq 1} \sup_{m\geq n} a_m,$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\geq n} a_m = \sup\{\inf_{m\geq n} a_m : \ n \geq 1\} = \sup_{n\geq 1} \inf_{m\geq n} a_m.$$

La seconde égalité de chaque ligne utilise le fait que les suites $(\sup_{m\geq n} a_m)_{n\geq 1}$ et $(\inf_{m\geq n} a_m)_{n\geq 1}$ sont respectivement décroissantes (le sup est prit sur un ensemble de plus en plus petit) et croissantes (l'inf est prit sur un ensemble de plus en plus petit).

Limsup et liminf

Quelles sont les liminf et limsup des suites

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ (-1)^{n/2} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}, \qquad b_n = \frac{(-1)^n}{n},$$

$$c_n = n^3, \qquad d_n = (-1)^n n^2.$$

Limsup et liminf

Theorem

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ *une suite à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *et* $a \in \mathbb{R}$. *Alors* $a_n \to a$ *si et seulement si* $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = a$.

Opérations sur les suites

Theorem

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ *deux suites* ***convergentes*** *à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *Notons* $a, b \in \mathbb{R}$ *leurs limites :* $a_n \to a$, $b_n \to b$. *Alors,*

i. les suites

$$(-a_n)_{n\geq 1}, \quad (a_n + b_n)_{n\geq 1}, \quad (a_n - b_n)_{n\geq 1}$$

sont convergentes et leurs limites sont données par

$$-a_n \to -a, \quad a_n + b_n \to a + b, \quad a_n - b_n \to a - b;$$

ii. si $b \neq 0$, *la suite* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq n_0}$ *est bien définit pour* n_0 *assez grand, et converge vers* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Preuve de $a_n + b_n \to a + b$ et de $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$ au tableau.

Théorème des gendarmes

Theorem

Soient $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$ *trois suites réelles. On suppose qu'il existe* $l \in \mathbb{R}$ *tel que* $b_n \to l$ *et* $c_n \to l$, *et que pour tout* $n \geq 1$, $b_n \geq a_n \geq c_n$. *Alors,* $a_n \to l$.

Preuve au tableau.

Théorème des gendarmes

On a le même type de théorème pour les suites qui divergent vers $\pm\infty$.

Theorem

Soient $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, *deux suites réelles telles que* $a_n \leq b_n$ *pour tout* $n \geq 1$. *On a que*

- *si* $a_n \to +\infty$, *alors* $b_n \to +\infty$,
- *si* $b_n \to -\infty$, *alors* $a_n \to -\infty$.

Théorème des gendarmes, exemple

On regarde la suite

$$a_n = \frac{\sin(\sqrt{3}n)}{n}.$$

On a que

$$\frac{-1}{n} \leq a_n \leq \frac{1}{n}.$$

En déduire que a_n converge et trouver $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Suites de Cauchy

Definition

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que c'est une *suite de Cauchy* si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n, m \geq n_0$, $|a_n - a_m| \leq \epsilon$.

En mots : une suite est de Cauchy si les valeurs "lointaines" de la suite sont toutes arbitrairement proches les unes des autres.

Suites de Cauchy, exemples

Lesquelles de ces suites sont de Cauchy ?

(1) $a_n = 1$ pour tout n,

(2) $a_n = n$,

(3) $a_n = \frac{1}{n^2}$,

(4) $a_n = (-1)^n$,

(5) $a_n = \frac{3-2n^2}{12n^2}$.

Suites de Cauchy, convergence

Si $(a_n)_{n\geq 1}$ est convergente, peut-on en dire quelque chose sur le fait qu'elle soit de Cauchy ?

Suites de Cauchy, convergence

Si $(a_n)_{n\geq 1}$ est convergente, peut-on en dire quelque chose sur le fait qu'elle soit de Cauchy ?

Oui ! Si a_n converge, elle est de Cauchy : si $a_n \to a$, pour n'importe quel $\epsilon > 0$, on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$ implique $|a_n - a| \leq \epsilon/2$. En particulier, pour $n, m \geq n_0$,

$$\begin{aligned}|a_n - a_m| &= |a_n - a + a - a_m| \\ &\leq |a_n - a| + |a - a_m| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

Suites de Cauchy, convergence

L'intérêt des suite de Cauchy est l'implication converse :

Theorem

*Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite **de Cauchy**. Alors, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $a_n \to a$.*

En mots : une suite qui à l'air de se rapprocher de quelques chose est convergente.

Pour la culture

On ne montrera pas le théorème précédent. Il est équivalent à l'axiome que tout ensemble majoré admet un supremum dans $\mathbb{R}$. Un espace dans lequel les suites de Cauchy convergent est appelé *complet*.

Suites de Cauchy, application

On va donner une définition du *nombre d'Euler*, $e = 2.71828\ldots$ que l'on reverra plus tard. On pose

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n}.$$

On voudrais poser $e := \lim_{n \to \infty} a_n$, il faut donc montrer que a_n converge. On montre qu'elle est de Cauchy (c.f. tableau ou slide suivant).

Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Les deux ayant des rôles symétrique, supposons $n \geq m$. On a

- $k! \geq 2^{k-1}$ pour $k \geq 1$,
- donc $|a_n - a_m| = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=m+1}^{n} 2^{1-k}$,
- on peut utiliser un changement d'indice dans la somme : pour toute suite $(b_k)_{k\geq 1}$,

$$\sum_{k=m+1}^{n} b_k = b_{m+1}+b_{m+2}+\cdots+b_{m+1+n-m-1} = \sum_{k=0}^{n-m-1} b_{m+1+k},$$

- on obtient

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| \leq \sum_{k=0}^{n-m-1} 2^{-m-k} &= 2^{-m} \sum_{k=0}^{n-m-1} 2^{-k} \\ &\leq 2^{-m} \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} = 2^{-m} \cdot \frac{1-2^{-n-1}}{2^{-1}} \leq 2^{1-m}. \end{aligned}$$

On a donc que pour n'importe quel $\epsilon > 0$, si $n, m \geq n_0 = n_0(\epsilon)$,

$$|a_n - a_m| \leq 2^{1-n_0} \leq \epsilon.$$

La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est donc de Cauchy et elle est donc bien convergente.

Séries

Rappel de notation : $\sum$

On rappelle que si $a_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$, et que $m \leq n$, on note

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n = \sum_{k=0}^{n-m} a_{m+k},$$

la seconde égalité est appelé *ré-indexage* de la somme (ou *changement de variable*).

On a la propriété que si $l \leq m < n$,

$$\sum_{k=l}^{n} a_k = \sum_{k=l}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k.$$

Rappel de notation : $\sum$

ATTENTION : la variable de sommation (k dans $\sum_{k=1}^{n} a_k$), est *locale* : elle est définie uniquement à l'intérieur de la somme et la valeur de la somme ne dépend pas du symbole choisit (k peut être remplacé par $\square, \dagger, i, \alpha, \ldots$).

On peut penser à $\sum_{k=m}^{n} a_k$ comme à une fonction qui prend en entrée la suite $(a_k)_{k\geq 0}$, et les bornes m, n : en pseudo-code, $\sum_{k=m}^{n} a_k$ est donnée par l'output de

Let $k = m$, $\Sigma = 0$;

While $k \leq n$ do :

Update $\Sigma \leftarrow \Sigma + a_k$;
Update $k \leftarrow k + 1$;

Return Σ ;

Rappel de notation : $\sum$

On a aussi que l'ordre dans lequel on somme les termes n'importe pas : si $\sigma : \{0, \ldots, n\} \to \{0, \ldots, n\}$ est une bijection (une *permutation des indices*) on a que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}.$$

Exemple : si $n = 2$ et $\sigma : \{0, 1, 2\} \to \{0, 1, 2\}$ est donnée par $\sigma(0) = 2$, $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 0$, l'égalité est simplement

$$a_0 + a_1 + a_2 = a_{\sigma(0)} + a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} = a_2 + a_1 + a_0.$$

Série infinie

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite. La *série infinie* associée est

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

PROBLÈME : est-ce que cette somme infinie fait du sens et si oui, lequel ?

Convergence de séries

On peut faire du sens de la somme infinie en introduisant :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \; n \geq 0,$$

la *suite des sommes partielles*. Si $(A_n)_{n\geq 0}$ converge, on peut alors *définir la somme infinie comme*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

On dit alors que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge*.

Convergence de séries

Est-ce que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ peut converger si la suite a_k ne satisfait pas $a_k \to 0$?

Convergence de séries

Est-ce que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ peut converger si la suite a_k ne satisfait pas $a_k \to 0$?

Non ! Si $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, on a $|A_{n+1} - A_n| = |a_{n+1}|$. Si la suite $(A_n)_{n \geq 0}$ converge, on doit avoir $|A_{n+1} - A_n| \to 0$ (pour le montrer, on peut utiliser que si A_n converge elle est de Cauchy).

Convergence de séries

Le problème avec cette manière de faire est que *l'ordre d'apparition des* a_n *importe*. On ne peut a priori donc pas faire comme dans une somme finie et modifier l'ordre dans lequel on somme les termes à loisir.

Convergence absolue

Pour palier à ce problème, on introduit une condition plus forte :

Definition

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite. On définit

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|,\ n \geq 0,$$

On dit que la série infinie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge absolument* si la suite $(B_n)_{n\geq 0}$ converge. On note cette condition $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$. Si la série ne converge pas absolument, on notera $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = +\infty$.

Notez que la suite B_n peut soit converger, soit diverger vers $+\infty$ car elle est croissante.

Convergence absolue

Theorem

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ *une suite. Supposons que* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$. *Alors, il existe* $A \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = A,$$

et pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} = A.$$

Sans preuve.

Convergence absolue

En mots : si la série converge absolument, alors la suite des sommes partielles converge et changer l'ordre des termes dans la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ ne change pas la valeur de la limite des sommes partielles. En particulier, la "somme infinie peut être sommée dans l'ordre voulu sans changer sa valeur".

Pour la culture, convergence pas absolue

Théorème de réarrangement de Riemann :

Theorem

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ *une suite. Supposons que* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge mais que* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = +\infty$*. Alors, pour tout* $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$*, il existe une bijection* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} = L.$$

En d'autre mots : si la série converge mais ne converge pas absolument, on peut changer l'ordre de sommation des termes de sorte à obtenir n'importe quel nombre (et même $\pm\infty$) comme limite des sommes partielles (et donc comme "valeur" de la somme infinie) !

Convergence absolue, exemple

On regarde la suite $a_n = (-1)^n \cdot 2^{-n}, n \geq 0$. On a alors que

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} = \frac{1 - 2^{-n-1}}{1 - 2^{-1}} = 2 - 2^{-n} \leq 2.$$

Donc, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_k| = 2 < \infty$. On a alors que la série infinie est bien définie et vaut

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{-1}{2}\right)^k &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+2^{-1}}\left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3} + \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^n} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Pour la culture : Exemple de convergence pas absolue

On regarde la suite $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}, n \geq 0$. On a alors que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2),$$

mais $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k+1} = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} = +\infty$ (on le verra plus tard).

Convergence de série alternées

Theorem (Règle de Leibniz)

Soit $a_n \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}$ *une suite à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$*. Alors, si* $a_{n+1} \leq a_n$ *pour tout* n *et que* $a_n \to 0$*, la série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

converge.

ATTENTION : la convergence n'est pas absolue !

En particulier, les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

convergent.

Critères de convergence

On a vu que pour que la série (somme infinie) fasse du sens et que l'on puisse y penser comme à une somme normale, on a besoin que la série converge absolument. On veut donc trouver des critères qui garantissent que la série converge absolument.

Comparaison de séries (convergence dominée)

Theorem

Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ *une suite à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *et* $(b_n)_{n\geq 0}$ *une suite à valeur dans* $\mathbb{R}_+$*. Si* $|a_n| \leq b_n$ *et que* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$*, alors* $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| < \infty$*.*
Réciproquement, si $|a_n| \geq b_n$ *et que* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = +\infty$*, alors* $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| = +\infty$*.*

Application

On a vu que la série $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$ converge. On peut alors en déduire que la série associée à la suite

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot (1+n^2)}$$

converge absolument car

$$|a_n| \leq 2^{-n}.$$

La série géométrique

Un exemple fondamental de série infinie est la *série géométrique*. C'est la série associée à une suite de la forme $a_n = x^n$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

La série géométrique : convergence

Si $|x| \geq 1$, $x^n \not\to 0$, donc la série diverge.

Si $|x| < 1$, on a alors que les sommes partielles des valeurs absolues sont données par

$$\sum_{k=0}^{n} |x^k| = \sum_{k=0}^{n} |x|^k = \frac{1 - |x|^{n+1}}{1 - |x|} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1 - |x|} < \infty,$$

en particulier, la série géométrique converge absolument dans ce cas.

Critère de d'Alembert (critère du quotient)

Theorem

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ *une suite à valeurs dans* $\mathbb{R}$*. Supposons qu'il existe* $L \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L.$$

Alors,

- *si* $|L| < 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} |a_n| < \infty$,
- *si* $|L| > 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} |a_n| = \infty$.

Pour la culture : idée de la preuve

Si $a_{n+1}/a_n \to L$, on sait $|a_{n+1}/a_n| \in [|L|-\epsilon, |L|+\epsilon]$ pour $n \geq n_0$ (avec n_0 qui dépend de ϵ). On écrit alors

$$|a_n| = \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \cdot \frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|} \cdot \dots \cdot \frac{|a_{n_0+1}|}{|a_{n_0}|} |a_{n_0}|.$$

Mais ce nombre est borné par en dessus par $(|L|+\epsilon)^{n-n_0}|a_{n_0}|$ et par en dessous par $(|L|-\epsilon)^{n-n_0}|a_{n_0}|$. On peut alors comparer par en dessus/dessous la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ avec les séries

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (|L|+\epsilon)^{n-n_0}|a_{n_0}| \text{ et } \sum_{n=n_0}^{\infty} (|L|-\epsilon)^{n-n_0}|a_{n_0}|,$$

qui sont des multiples de la série géométrique.

Pour la culture : idée de la preuve

Si $|L| < 1$, alors $|L| + \epsilon < 1$ pour $\epsilon > 0$ assez petit et donc, pour un n_0 correspondant à un tel ϵ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| + \frac{|a_{n_0}|}{(|L| + \epsilon)^{n_0}} \sum_{n=n_0}^{\infty} (|L| + \epsilon)^n < \infty,$$

car on reconnait la série géométrique. On procède de façon similaire pour $|L| > 1$, qui implique que $|L| - \epsilon > 1$ pour $\epsilon > 0$ assez petit.

Application

Est-ce que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5)^k}{k!}$$

converge absolument ?

Est-ce que ce critère permet de dire quelque chose sur la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}?$$

Règle de Cauchy (critère de la racine)

Theorem

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ *une suite à valeurs dans* $\mathbb{R}$*. Si il existe* $c \in [0,1)$ *tel que pour tout* $n \geq 1$

$$|a_n|^{1/n} \leq c,$$

alors $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$*.*

Pour la culture : idée de la preuve

On a que $|a_n|^{1/n} \leq c$ est équivalent à $|a_n| \leq c^n$. On peut alors utiliser le critère de comparaison pour comparer $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ avec la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} c^n$. Comme $c \in [0, 1)$ cette série est absolument convergente.

Règle de Cauchy (critère de la racine)

Du même argument, on déduit cette version plus facile à appliquer :

Theorem

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ *une suite à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *Si il existe* $c \in [0,1)$ *et* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq N$

$$|a_n|^{1/n} \leq c,$$

alors $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$.

Preuve au tableau (ou slide suivant).

On veut montrer que la suite $B_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ converge. Comme elle est croissante, il suffit de montrer qu'elle est majorée. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|a_n| \leq c^n$ (où $c < 1$).

On a alors

$$B_n \leq \begin{cases} B_N & \text{si } n \leq N, \\ B_N + \sum_{k=N+1}^{n} |a_k| & \text{si } n > N. \end{cases}$$

Comme $|a_k| \leq c^k$ pour $k \geq N$, on en déduit que $B_n \leq B_N + \sum_{k=0}^{n} c^k$ pour tout $n \geq 0$. On a alors que

$$B_n \leq \sup_{n \geq 0} \left(B_N + \sum_{k=0}^{n} c^k \right) = \lim_{n \to \infty} \left(B_N + \sum_{k=0}^{n} c^k \right) = B_N + \frac{1}{1-c} < \infty.$$

Donc la suite B_n est majorée.

Application

Est-ce que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3+n^2)4^{-n}$$

converge absolument ?

Trois méthodes :

- utiliser le critère de la racine ;
- utiliser le critère du quotient ;
- comparer avec un multiple de la série géométrique.

Méthode 1 : critère de la racine

On veut montrer que $A_n = \sum_{k=0}^{n}(3+k^2)4^{-k}$ est une suite convergente. On veut appliquer le critère de la racine. On va utiliser la condition avec $c = 1/2$, $N = 5$.

On veut donc montrer que pour tout $n \geq 5$,

$$(3+n^2)4^{-n} \leq 2^{-n},$$

ce qui est équivalent à montrer que $(3+n^2)2^{-n} \leq 1$.

Méthode 1 : critère de la racine

On montre que pour tout $n \geq 5$, $(3+n^2)2^{-n} \leq 1$. On procède en deux étapes.

(1) Montrons par récurrence : pour $n \geq 5$, $(2n+1)2^{-n} \leq 1$.

(1.1) Initialisation : $11 \cdot \frac{1}{32} \leq 1$.

(1.2) Pas de récurrence : on suppose $(2n+1)2^{-n} \leq 1$ et on montre que $(2(n+1)+1)2^{-n-1} \leq 1$.

$$(2(n+1)+1)2^{-n-1} = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\frac{2n+1}{2^n}}_{\overset{\text{H.R.}}{\leq}\ 1} + \underbrace{\frac{2}{2^n}}_{\leq 1}\Big)$$

$$\leq \frac{1}{2}\Big(1+1\Big) = 1.$$

Méthode 1 : critère de la racine

On montre que pour tout $n \geq 5$, $(3+n^2)2^{-n} \leq 1$. On procède en deux étapes.

(2) Montrons par récurrence : pour $n \geq 5$, $(3+n^2)2^{-n} \leq 1$.

(2.1) Initialisation : $28 \cdot \frac{1}{32} \leq 1$.

(2.2) Pas de récurrence : on suppose $(3+n^2)2^{-n} \leq 1$ et on montre que $(3+(n+1)^2)2^{-n-1} \leq 1$.

$$(3+(n+1)^2)2^{-n-1} = \frac{1}{2}\frac{3+n^2+2n+1}{2^n} = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\frac{3+n^2}{2^n}}_{\overset{\text{H.R.}}{\leq} 1} + \underbrace{\frac{2n+1}{2^n}}_{\overset{(1)}{\leq} 1}\Big) \leq 1.$$

Ce qui conclu la preuve.

Méthode 2 : critère du quotient

Dans notre cas, le critère du quotient est applicable si la suite

$$\left(\frac{(3+(n+1)^2)4^{-n-1}}{(3+n^2)4^{-n}}\right)_{n\geq 0}$$

converge vers un nombre L tel que $|L| < 1$.

On a

$$\frac{(3+(n+1)^2)4^{-n-1}}{(3+n^2)4^{-n}} = \frac{1}{4}\frac{n^2+2n+4}{n^2+3} =$$
$$\frac{1}{4}\left(\frac{n^2}{n^2+3} + \frac{2n}{n^2+3} + \frac{4}{n^2+3}\right).$$

Méthode 2 : critère du quotient

On étudie les trois suites dans la parenthèse :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2+3} = 0,$$
$$0 \leq \frac{2n}{n^2+3} \leq \frac{2n}{4n^2} = \frac{1}{2n} \text{ pour } n \geq 1,$$
$$\frac{n^2}{n^2+3} = \frac{1}{1+3/n^2} \text{ pour } n \geq 1.$$

Par le théorème des gendarmes, la seconde suite converge vers 0. La troisième suite converge vers 1 car la limite d'une suite ne dépend pas de la première valeur et la suite est l'inverse d'une suite qui converge vers un nombre non-zéro (1).

Méthode 2 : critère du quotient

La limite de la somme de suites convergentes est égale à la somme des limites, on obtient que la suite

$$\left(\frac{n^2}{n^2+3} + \frac{2n}{n^2+3} + \frac{4}{n^2+3}\right)_{n\geq 1}$$

converge vers $1 + 0 + 0 = 1$.

Méthode 2 : critère du quotient

On obtient que notre suite de départ est le produit d'une suite constante, 1/4, et d'une suite qui converge vers 1. La limite du produit de suites convergentes est égale au produit des limites. Donc,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3+(n+1)^2)4^{-n-1}}{(3+n^2)4^{-n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{n^2}{n^2+3} + \frac{2n}{n^2+3} + \frac{4}{n^2+3}\right) = \frac{1}{4}\cdot 1.$$

On a donc que la suite des ratios converge vers un nombre L ($L = 1/4$) avec $|L| < 1$. Donc la série converge absolument.

Méthode 3 : comparaison avec la série géométrique

On va utiliser le critère de comparaison. On commence par montrer

$$(3+n^2)4^{-n} \leq 3 \cdot 2^{-n}$$

- Par la récurrence de la méthode 1, on a que $(3+n^2)2^{-n} \leq 1$ pour $n \geq 5$.
- Pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$, on a que $(3+n^2)2^{-n}$ vaut (dans l'ordre)

$$3,\ 2 \leq 3,\ \frac{7}{4} \leq 3,\ \frac{12}{8} \leq 3,\ \frac{19}{16} \leq 3.$$

- Donc, $(3+n^2)2^{-n} \leq 3$ pour tout $n \geq 0$. En particulier,

$$(3+n^2)4^{-n} = (3+n^2)2^{-n} \cdot 2^{-n} \leq 3 \cdot 2^{-n}.$$

Méthode 3 : comparaison avec la série géométrique

On montre ensuite que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3 \cdot 2^{-n}$$

converge (ce qui permet d'utiliser le théorème de convergence dominée).

Méthode 3 : comparaison avec la série géométrique

On regarde la suite des sommes partielles :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} 3 \cdot 2^{-k} = 3 \sum_{k=0}^{n} 2^{-k}.$$

La suite $(A_n)_{n \geq 0}$ est croissante. Il suffit de montrer qu'elle est majorée. Pour tout $n \geq 0$, on a

$$A_n = 3 \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} \leq \lim_{n \to \infty} 3 \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} = 3 \cdot \frac{1}{1 - 2^{-1}} = 6,$$

car la limite est la limite d'un produit de suites convergentes. On a donc que la suite $(A_n)_{n \geq 0}$ est majorée (par 6) et croissante. Donc elle converge.