Chapitre I : bases mathématiques

- Raisonnement logique
- Ensembles
- Fonctions
- Ensembles de nombres
- Méthodes de preuves et applications

Raisonnement Logique

Raisonnement mathématique

Principe général :

1 On part d'*hypothèses* (clauses logiques, contraintes, propriétés) que l'on suppose vraies.

2 On applique à ces hypothèses des *règles de raisonnement logique* pour montrer qu'une autre clause logique ou propriété est aussi vraie.

3 On appelle cette nouvelle clause logique *conclusion*.

Raisonnement mathématique

Un *théorème* est la donnée d'un certain nombre d'hypothèses et d'une conclusion. La *preuve d'un théorème* est la description de la suite de règles logiques que l'on a appliquées pour passer des hypothèses à la conclusion.

ATTENTION : si on part avec des hypothèses fausses, on peut tout à fait arriver à une conclusion fausse (le point 1 est de supposer que les hypothèses sont vérifiées).

Notations logiques

On associe aux hypothèses/propriétés/etc., des *variables booléennes* : des variables $A, B, X, \square, \smile, \dots$ qui peuvent prendre les valeurs **V** (Vrai) ou **F** (Faux) et qui représentent si la proposition/... est vérifiée.

Notations logiques

Les *opérations logiques de bases* transforment deux variables booléennes, A, B, en une nouvelle variable booléennes. Elles sont données par

$\neg$ *non* : $\neg A$ est vrai si et seulement si A est faux ;

$\wedge$ *et* : $A \wedge B$ est vrai si et seulement si A et B sont tous les deux vrais ;

$\vee$ *ou* : $A \vee B$ est faux si et seulement si A et B sont tous les deux faux ;

$\implies$ *implique* : $A \implies B$ est vrai si et seulement si $A = \mathbf{V}$ implique $B = \mathbf{V}$ (en particulier, si $A = \mathbf{F}$, $A \implies B$ est toujours vrai) ;

$\iff$ *est équivalent à* : $A \iff B$ est vrai si et seulement si $A \implies B$ et $B \implies A$ sont vrais.

Notations logiques

Tableau récapitulatif :

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \implies B$	$A \iff B$
V	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**
F	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**

Grammaire mathématique : l'ordre importe !

Un exemple : est-ce que ces deux phrases ont le même sens ?

En Suisse en 2020, 10 enfants sont nés chaque heure.

En Suisse en 2020, chaque heure, 10 enfants sont nés.

Grammaire mathématique : l'ordre importe !

Un exemple : est-ce que ces deux phrases ont le même sens ?

En Suisse en 2020, 10 enfants sont nés chaque heure.

En Suisse en 2020, chaque heure, 10 enfants sont nés.

En mathématique, non ! Les éléments d'une phrase ont le droit de *dépendre des éléments mentionnés avant*.

Grammaire mathématique : l'ordre importe !

En Suisse en 2020, 10 enfants sont nés chaque heure.

En Suisse en 2020, chaque heure, 10 enfants sont nés.

Dans le premier cas, le bloc bleu peut dépendre du bloc rouge : pour que cette phrase soit vraie, il faudrait pouvoir trouver 10 enfants qui sont nés *chaque heure de l'année*. Comme on ne nait qu'une fois, cette phrase est donc clairement *fausse*.

Dans le second cas, le bloc rouge peut dépendre du bloc bleu : pour que la phrase soit vraie, il faut que pour chaque heure de l'année, on puisse trouver 10 enfants qui sont nés durant cette heure. Cette phrase peut être vraie (il faudrait vérifier tous les bulletins de naissance de 2020 pour en être sûr).

Deux symboles de plus

On utilisera les notations

$\forall$: *pour tout*,

$\exists$: *il existe*.

Avec ces symboles, l'exemple précédent devient

En Suisse en 2020, $\exists$ 10 enfants tels que $\forall$ heure, ces 10 enfants sont nés pendant cette heure.

En Suisse en 2020, $\forall$ heure, $\exists$ 10 enfants tels que ces 10 enfants sont nés pendant cette heure.

Ensembles

Ensembles

Definition

Un *ensemble* est une collection d'éléments. Les ensembles sont dénotés en utilisant { }. On les définit soit via une propriété :

$$\{x : \ x \text{ est un mammifère}\},$$

soit via une énumération des éléments contenus :

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

On note $x \in A$ pour "x est un élément de l'ensemble A". On notera aussi $\varnothing = \{\}$ l'ensemble qui ne contient aucun élément (ensemble *vide*).

Ensembles

Quelques propriétés importantes :

1) Les éléments d'un ensemble sont *distinguables* ; en d'autres mots, un ensemble ne contient *qu'une seule copie* d'un élément donné.

2) Deux ensembles sont les mêmes, notés $A = B$, si ils contiennent les mêmes éléments.

3) L'ordre dans lequel on énumère les éléments d'un ensemble n'a pas d'importance : par exemple

$$\{1, 2\} = \{2, 1\}.$$

Notations concernant les ensembles

Pour A, B des ensembles,

Notation	Traduction
$x \in A$	x est un élément de A
$x \notin A$	x n'est pas un élément de A
$A \subset B$	A est un sous-ensemble de B $(x \in A \implies x \in B)$
$A = B$	A et B sont égaux
$A \neq B$	A et B ne sont pas égaux
$\varnothing = \{\}$	l'ensemble vide

On remarque que $A = B$ si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$.

Opérations sur les Ensembles

Definition

Soient A, B deux ensembles. On définit

$A \cap B$: *l'intersection* de A et B :

$$A \cap B = \{x : \ x \in A \text{ et } x \in B\}$$

$A \cup B$: *l'union* de A et B :

$$A \cup B = \{x : \ x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

$A \setminus B$: *A privé de B* :

$$A \setminus B = \{x : \ x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

Listes

Definition

Une *liste* est une suite d'objets. On peut imaginer des boîtes portant les numéros $1, 2, 3, 4, \ldots$ dans chacune desquelles on peut ranger un élément. On définit une liste en spécifiant ses entrées : par exemple

$$L = (a, G, 45, \pi, 1, 1, 3.4, \square).$$

On accède aux entrées de la liste en spécifiant le numéro de la boîte dont on veut accéder au contenu : dans l'exemple précédent,

$$L_1 = a, \quad L_3 = 45, \quad L_8 = \square.$$

Deux listes sont égales si elles contiennent le même nombre d'entrées et les mêmes entrées dans chaque boîte.

Listes, propriétés

Contrairement aux ensembles, l'ordre *est important pour les listes*. Par exemple :

$$(1, 2, 3) \neq (2, 1, 3).$$

Comme l'ordre importe, on peut avoir plusieurs fois la même entrée dans une liste : par exemple

$$(1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0)$$

est une liste à 9 entrées.

Produit d'ensembles

Definition

Soient A, B deux ensembles. On définit le *produit cartésien de* A et B par

$$A \times B = \{(a, b) : \; a \in A, b \in B\}.$$

Les éléments du produit cartésien sont des listes à deux entrées.

Exemple au tableau.

Produit d'ensembles

On peut généraliser à plus de deux ensembles.

Definition

Soient A, B, C des ensembles. On définit le *produit cartésien de* A, B et C par

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) : \; a \in A, b \in B, c \in C\}.$$

On procède de la même manière pour plus de trois ensembles.

ATTENTION : le produit d'ensemble n'est pas associatif :

$$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C \neq A \times B \times C.$$

Voir série 2. Indice : les éléments du produit cartésien sont des listes, quel est le nombre d'entrées de ces listes dans chaque cas ?

Fonctions

Fonctions

Definition

Soient A, B deux ensembles. Une *fonction f de A vers B*, noté $f : A \to B$ est une application qui associe à chaque élément $a \in A$ un élément $b \in B$:

$$\forall a \in A,\ f(a) \in B.$$

A est appelé le *domaine* de f. B est appelé *l'ensemble d'arrivée* de f (ou *co-domaine* de f). $f(a)$ est appelé ***l'****image par f de a*. Si $f(a) = b$, a est ***une*** *pré-image par f de b*.

ATTENTION : pour définir une fonction, il est impératif de préciser le domaine et l'ensemble d'arrivée et pas juste de donner une expression pour la fonction.

Exemple au tableau.

Fonctions

Pour $f : A \to B$ et $I \subset A$, $J \subset B$, on définit

- *l'ensemble image de I par f* via

$$f(I) = \{b \in B : \ \exists a \in I, f(a) = b\}.$$

- *l'ensemble image de f* via

$$\mathrm{Image}(f) = f(A).$$

- *l'ensemble pré-image de J par f* via

$$f^{-1}(J) = \{a \in A : \ \exists f(a) \in J\}.$$

Fonctions injectives, surjectives, bijectives

Une fonction $f : A \to B$ est dite

- *injective* si elle attribue des éléments différents de B à des éléments différents de A :

$$\forall a, a' \in A, \ \text{ si } a \neq a', \text{ alors } f(a) \neq f(a');$$

- *surjective* si tout élément de B est l'image par f d'un élément de A : $f(A) = \mathrm{Image}(f) = B$ ou, de manière équivalente,

$$\forall b \in B, \ \exists a \in A \text{ tel que } f(a) = b;$$

- *bijective* si elle est injective et surjective.

Composition de fonctions

Definition

Soient A, B, C trois ensembles. Soit $f : A \to B$, $g : B \to C$ deux fonctions. On définit *la composée de f par g*, $g \circ f : A \to C$ par

$$g \circ f(a) = g\big(f(a)\big).$$

Exemple au tableau.

Fonction réciproque

Une fonction *injective* attribue des images différentes à des éléments différents. Une fonction *surjective* atteint tous les éléments de son ensemble d'arrivée. Une fonction *bijective* associe donc chaque élément de A à un *unique* élément de B et réciproquement, construit chaque élément de B comme l'image d'un *unique* élément de A. Dans ce cas, il est possible de parler de la fonction qui "inverse le procédé" : la *réciproque de* f.

Fonction réciproque

Definition

Soient A, B deux ensembles. Soit $f : A \to B$ une fonction bijective. On définit *la réciproque de* f, $f^{-1} : B \to A$ par, pour $a \in A, b \in B$,

$$f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b.$$

La fonction réciproque satisfait que pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$,

$$f(f^1(b)) = b, \quad f^{-1}(f(a)) = a.$$

Fonction numérique

Dans ce cours on s'intéressera principalement à des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. En d'autre mots, des fonctions qui transforment des nombres en d'autres nombres.

Graphe de fonctions

Dans le cas d'une fonction numérique $f : E \to \mathbb{R}$ avec $E \subset \mathbb{R}$, on peut visualiser f à l'aide d'un dessin dans le plan $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

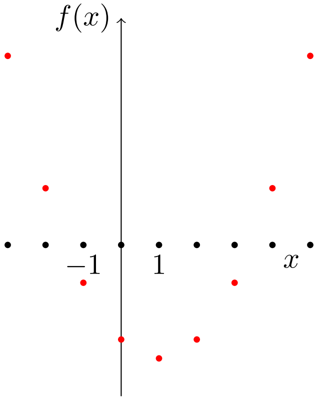
Definition

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction avec $E \subset \mathbb{R}$. Le *graphe de f* est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ donné par

$$\text{graphe}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \; x \in E \text{ et } y = f(x)\}.$$

Exemple

Si on regarde $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, donnée par $f(n) = \frac{(n-1)^2}{2} - 3$, on obtient



Ensembles de Nombres

Les nombres entiers

Les nombre *entiers*, dénotés $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

$\mathbb{N}$ est stable par addition :

$$n, m \in \mathbb{N} \implies n + m \in \mathbb{N}.$$

Mais pas par soustraction : $3 - 6 \notin \mathbb{N}$.

ATTENTION : dans certain textes (et langages de programmation comme MATLAB, R), les entiers commencent à 1 et non à 0.

Les entiers relatifs

Les nombre *entiers relatifs*, dénotés $\mathbb{Z}$, "complètent" les entiers pour l'opération de soustraction.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Z est stable par addition et soustraction. De plus, $\mathbb{Z}$ est stable par multiplication :

$$n, m \in \mathbb{Z} \implies n \cdot m \in \mathbb{Z},$$

mais pas par division : $1/2 \notin \mathbb{Z}$.

Les nombres rationnels

Les nombre *rationnels*, dénotés $\mathbb{Q}$, "complètent" les entiers relatifs pour l'opération de division.

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : \ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q > 0\}/\sim .$$

Le quotient $/\sim$ veut dire que deux fractions, $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$, données dans l'expression entre crochets sont considérées comme identiques si il existe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ tel que

$$p = np' \text{ et } q = nq'.$$

On dit que la fraction $\frac{p}{q}$ est *irréductible* si le seul n qui satisfait la condition ci-dessus est $n = 1$. Tout nombre rationnel peut s'écrire comme une fraction irréductible.

Pour la culture : structure de groupe

Definition

Soit A un ensemble et $\Box$ une *loi de composition interne* qui associe à $a, b \in A$ un nouvel élément de A dénoté $a \Box b$. La pair $(A, \Box)$ est un *groupe* si $\Box$ satisfait

- *associativité* : si $a, b, c \in A$ alors $a \Box (b \Box c) = (a \Box b) \Box c$;
- *élément neutre* : il existe $e \in A$ tel que $a \Box e = e \Box a = a$ pour tout $a \in A$;
- *inverse* : pour tout $a \in A$, il existe $a^{-1} \in A$ tel que $a \Box a^{-1} = a^{-1} \Box a = e$.

Pour la culture : structure de groupe

On dit de plus que le groupe $(A, \Box)$ est *commutatif* si

$$\forall a, b \in A,\ a \Box b = b \Box a.$$

$(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Q}, +)$ sont des groupes commutatifs : le neutre est donné par 0 et l'inverse de x est $-x$.

$(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ (avec $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$) est un groupe commutatif : le neutre est donné par 1 et l'inverse de $\frac{p}{q}$ est $\frac{q}{p}$.

Les nombres réels

Il existe de nombreuses manières (équivalentes) de construire les nombres réels à partir de $\mathbb{Q}$. On ne le fera pas ici, et on supposera simplement que l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}$, existe et possède un certain nombre de propriétés (approche axiomatique).

Un *axiome* est une hypothèse que l'on fait de manière implicite dans *tous les théorèmes* que l'on énonce. Comme on travaillera sur les nombres réels, on aura comme axiomes les règles de logique vues précédemment et les axiomes d'existence de $\mathbb{R}$ que l'on décrit maintenant.

Les nombres réels

Les axiomes que l'on supposera sur $\mathbb{R}$ sont simplement la formalisation des manipulations que vous connaissez déjà.

Pour la culture : axiomes d'existence de $\mathbb{R}$, groupe $+, \cdot$

On suppose qu'il existe un ensemble $\mathbb{R}$ muni de deux lois de compositions internes $+$ et $\cdot$ tel que

- $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif ;
- $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ est un groupe commutatif, où $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ avec 0 le neutre pour $+$. Le neutre pour $\cdot$ est noté 1 ;
- $\cdot$ est *distributif* par rapport à $+$:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \; x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Pour la culture : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

Comme $1 \in \mathbb{R}$, on a que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$: pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}},$$

comme $\mathbb{R}$ est stable par addition, $n \in \mathbb{R}$. De plus, comme $x \in \mathbb{R}$ implique $-x \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

Pour la culture : $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Maintenant, si $x \in \mathbb{Q}$, alors $x = \frac{p}{q} = p \cdot q^{-1}$ avec $p \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ et $q \in \{1, 2, \dots\} \subset \mathbb{R}$. De plus,

- comme $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ implique que $y^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a que $q^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- comme $\mathbb{R}$ est stable par multiplication, $p \cdot q^{-1} \in \mathbb{R}$;

d'où $x \in \mathbb{R}$.

On vient de montrer que tout élément de $\mathbb{Q}$ est aussi un élément de $\mathbb{R}$, donc $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Pour la culture : axiomes d'existence de $\mathbb{R}$, ordre

On suppose de plus que $\mathbb{R}$ est muni d'une *structure d'ordre strict total* : il existe une opération $<$ qui attribue à deux éléments distincts, $x, y \in \mathbb{R}$, une valeur de vérité $x < y \in \{\mathbf{F}, \mathbf{V}\}$ et qui satisfait :

- $\forall x, y \in \mathbb{R}$ exactement une des clauses suivantes est vraie :

$$x < y, \qquad y < x, \qquad x = y;$$

- *transitivité* : si $x < y$ et $y < z$, alors $x < z$.

On notera $x \leq y$ pour $x < y \vee x = y$. Aussi, on notera $x \geq y, x > y$ pour $y \leq x, y < x$ respectivement.

Du premier point, on remarque que si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$.

Pour la culture : axiomes d'existence de $\mathbb{R}$, ordre

On supposera de plus que la structure d'ordre $<$ se comporte avec $+$, $\cdot$ comme suit :

- pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x > y$, alors $x + z > y + z$;
- pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x > y$ et $z > 0$, alors $x \cdot z > y \cdot z$.

Definition

Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. On dit que M est

- *un majorant* de E si $x \leq M$ pour tout $x \in E$;
- *le supremum* (ou *la borne supérieure*) de E si M est un majorant de E et pour tout M' majorant de E on a $M' \geq M$. On note alors $M = \sup E$;
- *le maximum* de E si $M = \sup E$ et $M \in E$. On note alors $M = \max E$.

Si $E \subset \mathbb{R}$ possède un majorant, on dit que E est *borné supérieurement* (ou *majoré*).

Definition

Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. On dit que M est

- *un minorant* de E si $x \geq M$ pour tout $x \in E$;
- *l'infimum* (ou *la borne inférieure*) de E si M est un minorant de E et pour tout M' minorant de E on a $M' \leq M$. On note alors $M = \inf E$;
- *le minimum* de E si $M = \inf E$ et $M \in E$. On note alors $M = \min E$.

Si $E \subset \mathbb{R}$ possède un minorant, on dit que E est *borné inférieurement* (ou *minoré*).

Si $E \subset \mathbb{R}$ est borné supérieurement et inférieurement, on dit que E est *borné*.

Pour la culture : axiomes d'existence de $\mathbb{R}$, borne supérieure

Le dernier axiome concerne l'existence de supremum pour des sous-ensembles majoré de $\mathbb{R}$: si $E \subset \mathbb{R}$ est non-vide ($E \neq \varnothing$) et majoré, alors le supremum de E existe et est dans $\mathbb{R}$.

De cet axiome, on déduit la propriété symétrique : si $E \subset \mathbb{R}$ est non-vide ($E \neq \varnothing$) et minoré, alors l'infimum de E existe et est dans $\mathbb{R}$.

Cet axiome est le seul que $\mathbb{Q}$ ne satisfait pas ! (on le verra un peu plus tard)

Notation

On notera

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \quad \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Intervalles

Pour $x \leq y$, on définit les *intervalles*

- *ouvert* $(x, y) = \{z \in \mathbb{R} : \; x < z < y\}$;
- *fermés* $[x, y] = \{z \in \mathbb{R} : \; x \leq z \leq y\}$;
- *ouvert à droite, fermé à gauche*
  $[x, y) = \{z \in \mathbb{R} : \; x \leq z < y\}$;
- *ouvert à gauche, fermé à droite*
  $(x, y] = \{z \in \mathbb{R} : \; x < z \leq y\}$.

On notera aussi :

$$(x, x) = \varnothing, \quad [x, x] = \{x\}.$$

La notation] à la place de (, et [à la place) (expl : $]x, y[$ à la place de (x, y)) est aussi souvent utilisée. Les deux sont interchangeables.

Intervalles

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit les *intervalles semi-infinis*

- *infini à droite, ouvert à gauche* $(x, +\infty) = \{z \in \mathbb{R} : \ z > x\}$;
- *infini à droite, fermé à gauche* $[x, +\infty) = \{z \in \mathbb{R} : \ z \geq x\}$;
- *infini à gauche, ouvert à droite* $(-\infty, x) = \{z \in \mathbb{R} : \ z < x\}$;
- *infini à gauche, fermé à droite* $(-\infty, x] = \{z \in \mathbb{R} : \ z \leq x\}$.

Finalement, on a que l'intervalle bi-infini est $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Caractérisation des intervalles

Theorem

Soit $E \subset \mathbb{R}$ *non vide* ($E \neq \varnothing$). *Alors* E *est un intervalle (fini, semi-infini ou bi-infini) si et seulement si pour tout* $x, y \in E$ *avec* $x \leq y$, $[x, y] \subset E$.

Sans preuve.

Majorants, minorants, exemples

- $(-\infty, \sqrt{2})$ est-il majoré ? minoré ? Admet-il un maximum ?
- Mêmes questions pour $(-\infty, \sqrt{2}]$.
- $(-1, 1]$ admet-il un maximum ? un minimum ?
- $\mathbb{N}$ est-il majoré ? minoré ?
- Mêmes questions pour $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$.

Inclusion d'ensembles et majorants, minorants

Theorem

Soit $A, B \subset \mathbb{R}$ *non vides. Supposons que* $A \subset B$*. Alors,*

- *si* M *est un majorant de* B*, c'est un majorant de* A *;*
- *si* M *est un minorant de* B*, c'est un minorant de* A*.*

Preuve du cas majorant au tableau. Expl : $(1, 4.2) \subset [1, 4.2]$ et $((0, 1) \cap \mathbb{Q}) \subset [-3, 4]$.

Caractérisation alternative de inf et sup

Theorem

Soit $A \subset \mathbb{R}$ *non vide. Alors,*

- $x = \sup A$ *si et seulement si* x *est un majorant de* A *et pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe* $y \in A$ *tel que* $y \geq x - \epsilon$ *;*
- $x = \inf A$ *si et seulement si* x *est un minorant de* A *et pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe* $y \in A$ *tel que* $y \leq x + \epsilon$*.*

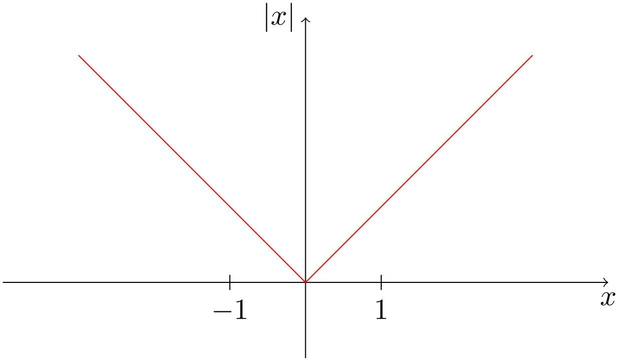
Sans preuve. Expl : $0 = \inf \mathbb{N}$ au tableau.

La fonction valeur absolue

On définit la fonction $| \; | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La fonction valeur absolue



La fonction valeur absolue

Theorem

La fonction $|\ |$ *satisfait : si* $x, y \in \mathbb{R}$ *et* $c \geq 0$,

(i) $-|x| \leq x \leq |x|$ *;*

(ii) $|-x| = |x|$ *;*

(iii) $|x| \leq c$ *est équivalent à* $x \in [-c, c]$ *; en particulier* $|x| \leq 0$ *implique* $x = 0$ *;*

(iv) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ *;*

(v) $|x \pm y| \leq |x| + |y|$ *inégalité du triangle ;*

(vi) $|x \pm y| \geq \big||x| - |y|\big|$ *inégalité du triangle inverse.*

Preuve en exercice pour les motivés.

Écriture décimale

On représente souvent les nombres réels comme l'ensemble des "nombres à virgule" :

$$x = \sigma a_0 a_1 a_2 \dots a_n, b_1 b_2 \dots$$

avec $n \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \{+, -\}$, $a_0 \in \{1, \dots, 9\}$ si $n \geq 1$, $a_0 \in \{0, \dots, 9\}$ si $n = 0$, $a_1, \dots, a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $b_m \in \{0, 1, \dots, 9\}$ pour tout $m \geq 1$.

On dit alors que le nombre $a_0 a_1 a_2 \dots a_n$ est la *partie entière* de x et $b_1 b_2 \dots$ la *partie décimale*.

Écriture décimale

ATTENTION ! Quand la partie décimale est infinie, il faut faire un peu attention : les nombres

$$0.9999999999999999999999\bar{9}$$

et

$$1 = 1.00000000\bar{0}$$

sont-ils différents ?

Les nombres complexes

Les nombres complexes sont une extension des nombres réels. Ils sont donnés par

$$\mathbb{C} = \{x + \mathrm{i}y : \ x, y \in \mathbb{R}\},$$

où i est un symbole avec la propriété $\mathrm{i}^2 = -1$.

On les étudiera plus tard dans le cours.

Méthodes de preuves et applications

Rappels

Au tableau : fonction, domaine, bijectivité, réciproque.

Réciproque de $x \mapsto x^2$

On regarde la fonction

$$f(x) = x^2.$$

On pose $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0\} =: [0, +\infty)$ ($a := b$ veut dire "on définit a comme étant égal à b").

- Si on regarde $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, est-elle injective ? surjective ?
- Même question si on regarde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$.

Réciproque de $x \mapsto x^2$

Theorem

La fonction

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad f(x) = x^2,$$

est bijective.

"Preuve" par le dessin au tableau. On verra comment prouver ceci rigoureusement quand on étudiera les fonctions *continues*.

Comme f est bijective, on peut définir sa réciproque : la fonction racine $x \mapsto \sqrt{x}$. Quel est le domaine de cette fonction ?

Méthode de preuve I : raisonner par l'absurde

Cadre : on suppose des hypothèses, notées H (on inclut les axiomes dans H), et on veut montrer une conclusion, notée C.

On va utiliser que

$$(H \implies C) \iff (\neg C \implies \neg H).$$

En effet,

H	C	$\neg H$	$\neg C$	$H \implies C$	$\neg C \implies \neg H$
V	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**

Méthode de preuve I : raisonner par l'absurde

L'idée du raisonnement par l'absurde est de *supposer que la conclusion (C) est fausse* et arriver à une "contradiction" : *déduire que les hypothèses (H) sont fausses*. On aura alors montré que la non-validité de la conclusion entraine la non-validité des hypothèses. Par l'équivalence précédente, ceci est identique à avoir montré que la validité des hypothèses entraine la validité de la conclusion.

Application : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Theorem

$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. En particulier, $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q}$.

Démonstration.

Par l'absurde :

- On suppose $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$: on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $\frac{p}{q}$ une fraction irréductible.
- En prenant le carré, on a $\frac{p^2}{q^2} = 2$.
- On en déduit que $p^2 = 2q^2$ est pair, et donc que p est pair. Posons $p = 2p'$, $p' \in \mathbb{Z}$.
- On a alors que $q^2 = p^2/2 = 2(p')^2$, donc q^2 et q sont pair. Posons $q = 2q'$, $q' \in \mathbb{N}^*$.
- On a montré que $q = 2q'$ et $p = 2p'$ avec $p' \in \mathbb{Z}$, $q' \in \mathbb{N}^*$, ce qui contredit le premier point.

$\square$

Méthode de preuve II : raisonner par récurrence

Cadre : on suppose des hypothèses, notées H (on inclut les axiomes dans H), et on veut montrer une *famille de conclusions*, notées $C_1, C_2, \ldots$.

L'idée du raisonnement par récurrence est un principe de dominos : on utilise H pour montrer C_1, puis on utilise H *et* C_1 pour montrer C_2, puis on utilise H *et* C_1 *et* C_2 pour montrer C_3, etc.

Méthode de preuve II : raisonner par récurrence

Procédé :

- on introduit une famille d'*hypothèses de récurrence*, $\mathcal{H}_n,\ n \geq 1$, via

  $$\mathcal{H}_1 = H \wedge C_1, \quad \mathcal{H}_2 = H \wedge C_1 \wedge C_2, \quad \mathcal{H}_3 = H \wedge C_1 \wedge C_2 \wedge C_3, \ldots$$

  On a $\mathcal{H}_{n+1} = \mathcal{H}_n \wedge C_{n+1}$;
- on montre que $H \implies \mathcal{H}_1$, c'est le *pas d'initialisation* (faire tomber le premier domino) ;
- on montre que pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$, c'est le *pas de récurrence* (faire tomber un domino entraine la chute du suivant). Comme $\mathcal{H}_{n+1} = \mathcal{H}_n \wedge C_{n+1}$, il suffit de montrer que $\mathcal{H}_n \implies C_{n+1}$.

Résultat : on a montré que $\mathcal{H}_1$ est vrai et que sa validité entraine celle de $\mathcal{H}_2$, qui entraine celle de $\mathcal{H}_3$, etc.... On obtient que $\mathcal{H}_n$ est vrai pour tout n, et donc que C_n est vrai pour tout n !

Application 1 : somme d'entiers

Theorem

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + (k-1) + k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Preuve au tableau (et sur le slide suivant).

Application 1 : somme d'entiers

Démonstration.

La conclusion no n (C_n) est que l'identité $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ est valide. L'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_n$ est donc que pour tout $m \in \{1, \dots, n\}$,

$$\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}.$$

On commence par montrer $\mathcal{H}_1$: $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$.
On montre ensuite de $\mathcal{H}_n$ implique $\mathcal{H}_{n+1}$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=1}^{n} k \overset{\mathcal{H}_n}{=} (n+1) + \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= (n+1)\big(1 + \frac{n}{2}\big) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2),$$

ce qui conclue la preuve. $\square$

Application 2 : série géométrique

Theorem

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *et tout* $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, *on a*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Preuve au tableau.