EPFL – Automne 2024	
Analyse I – MT	**Corrigé**
Série 4	7 octobre 2024

Exercice 1.
Donner l'infimum et le supremum des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ ci-dessous et préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum (*pas besoin de faire la demonstration*).

$$(i)\ A =]-1, \sqrt{2}\,] \qquad (ii)\ B =]\sqrt{3}, \infty\,[\qquad (iii)\ C = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 1| \leq 1\}$$

Solution :

(i) On a $\inf A = -1$ et $\sup A = \sqrt{2}$. Comme $\sup A = \sqrt{2} \in A$, il s'agit d'un maximum. Par contre $\inf A = -1 \notin A$, donc ce n'est pas un minimum.

(ii) On a $\inf B = \sqrt{3} \notin B$ et $\sup B = +\infty$ puisque B n'est pas majoré. Ainsi B n'admet ni minimum ni maximum.

(iii) $C = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq 2x - 1 \leq 1\} = [0, 1]$. Ainsi $\inf C = \min C = 0$ et $\sup C = \max C = 1$.

Exercice 2.
Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Solution :
Notons $z = a + i\,b$, où $\operatorname{Re}(z) = a$ et $\operatorname{Im}(z) = b$. Le complexe conjugué de z est $\bar{z} = a - i\,b$. Ainsi, on a :

$$z + \bar{z} = a + i\,b \ + \ a - i\,b = 2a \quad \text{soit} \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}.$$

De même :

$$z - \bar{z} = a + i\,b \ - \ (a - i\,b) = 2b\,i \quad \text{soit} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Exercice 3.
Réecrire les sous-ensembles suivants en utilisant la notation des intervalles :

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 1\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 1\}$
3. $C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -x \leq 1\}$
4. $D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \leq 2\}$
5. $E = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \geq 2\}$
6. $F = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -x^3 \geq 3\}$

Solution :

1. $A =]-\infty, 1[$
2. $B =]-\infty, 1]$
3. $C = [-1, \infty[$
4. $D = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$
5. $E = \left]-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, \infty\right[$
6. $F = \left]-\infty, -\sqrt[3]{3}\right]$

Exercice 4.
Exprimer chacun des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ ci-dessous en termes de réunions ou d'intersections d'intervalles (ouverts, fermés ou non).

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x| < 1000\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 \geq 100\}$
3. $C = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x^3 = 27\}$
4. $D = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq 33\}$
5. $E = \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x^2 - 2| < 1\}$

Solution :

1. $A =]-1000, 1000[$
2. $B =]-\infty, -10] \cup [10, +\infty[$
3. $C = [3, 3] = \{3\}$
4. $D =]-\infty, 33[\ \cup \ ]33, +\infty[$
5. $E =]-\sqrt{3}, -1[\ \cup \ ]1, \sqrt{3}[$

Exercice 5.
Soit $b \in \mathbb{R}$.

(i) Montrer que $I =]-\infty, b[$ n'est pas minoré et $\sup I = b$.

(ii) Montrer que $I = [b, +\infty[$ n'est pas majoré et $\inf I = b$.

Solution :

(i) Commençons par montrer que I n'est pas minoré. Vu que la définition de "I est minoré" est

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall a \in I,\ x \leq a,$$

on doit montrer que la négation de ceci est vraei. La négation est donnée par (voir Remarque A.6 du polycopié)

$$\begin{aligned}
&\neg \left(\exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall a \in I,\ x \leq a\right)\\
&\forall x \in \mathbb{R},\ \neg \left(\forall a \in I,\ x \leq a\right)\\
&\forall x \in \mathbb{R},\ \exists a \in I \text{ tel que } \neg \left(x \leq a\right)\\
&\forall x \in \mathbb{R},\ \exists a \in I \text{ tel que } x > a.
\end{aligned}$$

Soit donc $x \in \mathbb{R}$ quelconque. On distingue deux cas :
Cas 1 : $x > b$
On peut alors prendre $a \in I$ quelconque et on a

$$a < b < x,$$

qui est le résultat voulu.
Cas 2 : $x \leq b$.
Soit alors $a = x - 1$. Alors, on doit montrer que $a \in I$ et $x > a$.
On a

$$a = x - 1 \leq b - 1 < b.$$

Ainsi, par définition de I, $a \in I$.
De plus,

$$a = x - 1 < x,$$

ce qui termine la démonstration du fait que I n'est pas minoré dans ce cas.
La combinaison des deux cas montre que I n'est pas minoré.

<u>*Remarque*</u> *: Dans le cas 2, on a choisi $x - 1$ pour garantir que $a < x$ Ici, n'importe quel $a < x$ fait l'affaire, on aurait pu prendre $a = x - 14$, $a = x - 10^{-14}$, $a = x - \pi$, etc...*

Passons maintenant à la démonstration du fait que $\sup I = b$. Par le théorème 1.11 (ii), on doit montrer deux choses :

(a) $\forall a \in I$, $a \leq b$

(b) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in I$ tel que $a \geq b - \varepsilon$.

Commençons par (a). Soit $a \in I$ quelconque. Par définition de I, on a $a < b$ ce qui implique $a \leq b$, qui est le résultat voulu.
Passons à la démonstration (b). Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Choisissons $a = b - \varepsilon$. Il faut maintenant montrer deux choses : que $a \in I$ et que $a \geq b - \varepsilon$.

On a
$$a = b - \varepsilon < b,$$
donc $a < b$ et $a \in I$. Pour finir, $a = b - \varepsilon$ implique $a \geq b - \varepsilon$ qui est le résultat voulu et montre que
$$\sup I = b.$$

(ii) Commençons par montrer que I n'est pas majoré. Vu que la définition de "I est majoré" est
$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall a \in I,\ x \geq a,$$
on doit montrer que la négation de ceci est vraie. La négation est donnée par (voir Remarque A.6 du polycopié)
$$\begin{aligned}
&\neg \left(\exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall a \in I,\ x \geq a\right)\\
&\forall x \in \mathbb{R},\ \neg \left(\forall a \in I,\ x \geq a\right)\\
&\forall x \in \mathbb{R},\ \exists a \in I \text{ tel que } \neg \left(x \geq a\right)\\
&\forall x \in \mathbb{R},\ \exists a \in I \text{ tel que } x < a.
\end{aligned}$$
Soit donc $x \in \mathbb{R}$ quelconque. On distingue deux cas :
Cas 1 : $x < b$
On peut alors prendre $a \in I$ quelconque et on a
$$x < b \leq a$$
qui est le résultat voulu.
Cas 2 : $x \geq b$.
Soit alors $a = x + 1$. Alors, on doit montrer que $a \in I$ et $x < a$.
On a
$$a = x + 1 \geq b + 1 \geq b.$$
Ainsi, par définition de I, $a \in I$.
De plus,
$$a = x + 1 > x,$$
ce qui termine la démonstration du fait que I n'est pas majoré dans ce cas.
La combinaison des deux cas montre que I n'est pas majoré.
Passons à la démonstration de $b = \inf I$. On a dans ce cas deux possibilités.
1. Méthode par la caractérisation : Par le théorème 1.11 (i), on doit montrer deux choses :
(a) $\forall a \in I$, $a \geq b$
(b) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in I$ tel que $a \leq b + \varepsilon$.
Commençons par (a). Soit $a \in I$ quelconque. Par définition de I, on a $a \geq b$, qui est le résultat voulu.

Passons à la démonstration (b). Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Choisissons $a = b + \varepsilon$. Il faut maintenant montrer deux choses : que $a \in I$ et que $a \geq b - \varepsilon$.
On a
$$a = b + \varepsilon \geq b,$$
donc $a \geq b$ et $a \in I$. Pour finir, $a = b + \varepsilon$ implique $a \leq b + \varepsilon$ qui est le résultat voulu et montre que
$$\sup I = b.$$

2. Méthode par le maximum : Par la remarque 1.15, il suffit ici de montrer que $b = \min I$ pour avoir que $b = \inf I$.
On a $b \in I$, par définition de I. De plus, pour tout $a \in I$, on a $b \leq a$. Ainsi, par définition du minimum (Définition 1.14) on a $b = \min I$ et donc par la Remarque 1.15, ceci implique $b = \inf I$.

Exercice 6.
Soit $A \subset \mathbb{R}$ un **intervalle** borné non vide.
Vrai ou faux ?

Q1 : Il suit que $\sup A \in A$ et $\inf A \in A$.

Q2 : Si $\sup A \in A$ et $\inf A \in A$, alors A est fermé.

Q3 : Si A est fermé, alors $\sup A \in A$ et $\inf A \in A$.

Q4 : Si $\sup A \notin A$ et $\inf A \notin A$, alors A est ouvert.

Q5 : Si A est ouvert, alors $\inf A \notin A$ et $\sup A \notin A$.

Solution :

Q1 : FAUX.
Prendre par exemple l'intervalle borné $A = [1, 2[$. Alors $\sup A = 2 \notin A$.

Q2 : VRAI.
Si un intervalle borné A n'est pas fermé, au moins une de ses extrémités n'appartient pas à l'intervalle. Mais les extrémités de A sont $\inf A$ et $\sup A$ qui sont dans A par hypothèse. Ainsi A est forcément fermé.

Q3 : VRAI.
Un intervalle fermé et borné est de la forme $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Ainsi $\inf A = a$ et $\sup A = b$ qui sont bien dans A.

Q4 : VRAI.
Comme $a = \inf A \notin A$, on a $a < x$ pour tout $x \in A$. Par définition de l'infimum il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $x \in A$ tel que $x \leq a + \varepsilon$, ce qui assure qu'il n'y a pas de "trou" entre a et les éléments de A. De même on montre à partir de la définition du supremum que $x < \sup A =: b$ pour tout $x \in A$. Ainsi $A =]a, b[$ est un intervalle ouvert.

Q5 : VRAI.
Par l'absurde, supposons que $a = \inf A \in A$. Alors $a \leq x$ pour tout $x \in A$ et comme $a \in A$, A ne peut pas être ouvert. Donc $\inf A \notin A$. De même pour $b = \sup A$.

Remarque.
Si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas nécessairement un intervalle, $Q2$ et $Q4$ sont faux.

Exercice 7.
Résoudre les inéquations suivantes :

(i) $x^2 - 2x - 2 < 0$ pour $x \in \mathbb{R}$

(ii) $|x - 2| \leq |x + 3|$ pour $x \in \mathbb{R}$

(iii) $\dfrac{1}{1 - |x|} < 1$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

(iv) $\dfrac{x}{|x| - 2} + \dfrac{|x|}{x + 1} \geq 0$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2, -1\}$

c'est-à-dire spécifier (en termes d'unions d'intervalles) les ensembles $A \subset \mathbb{R}$ tels que les inéquations sont satisfaites pour tout $x \in A$ et pas satisfaites pour $x \notin A$.
<u>Indication</u> : il est parfois utile de considérer plusieurs cas séparément.

Solution :

(i) Comme $x^2 - 2x - 2 = (x - 1)^2 - 3$, l'inégalité à résoudre devient $(x - 1)^2 < 3$, qui est satisfaite si $-\sqrt{3} < x - 1 < \sqrt{3}$. En ajoutant 1, on trouve $1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}$ et la solution du problème est

$$x \in \left]1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\right[\ .$$

(*ii*) L'inégalité $|x-2| \leq |x+3|$ est équivalente à $(x-2)^2 \leq (x+3)^2$. On trouve $x^2-4x+4 \leq x^2+6x+9$, et donc $10x \geq -5$. La solution du problème est

$$x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[\ .$$

(*iii*) Il faut distinguer quatre cas : (a) $x < -1$, (b) $-1 < x < 0$, (c) $0 \leq x < 1$, (d) $x > 1$.

(a) Pour $x < -1$ on a $1 - |x| = 1 + x < 0$, et l'inégalité peut donc être réécrite comme

$$1 > 1 + x \,,$$

ce qui est vrai si $x < 0$. Cette inégalité est satisfaite pour $x < -1$.

(b) Pour $-1 < x < 0$ on a $1 - |x| = 1 + x > 0$, et l'inégalité peut donc être réécrite comme

$$1 < 1 + x \,,$$

ce qui est vrai si $x > 0$. Cette inégalité n'est jamais satisfaite pour $x < 0$.

(c) Pour $0 \leq x < 1$ on a $1 - |x| = 1 - x > 0$, et l'inégalité peut donc être réécrite comme

$$1 < 1 - x \,,$$

ce qui est vrai si $x < 0$. Cette inégalité n'est jamais satisfaite.

(d) Pour $x > 1$ on a $1 - |x| = 1 - x < 0$, et l'inégalité peut donc être réécrite comme

$$1 > 1 - x \,,$$

ce qui est vrai si $x > 0$. Cette inégalité est satisfaite pour $x > 1$.

Pour résumer, l'inégalité est donc satisfaite pour

$$x \in]-\infty, -1[\,\cup\,]1, +\infty[\ .$$

(*iv*) On réécrit l'inégalité sous la forme

$$\frac{x}{|x| - 2} \geq \frac{-|x|}{x+1} \ .$$

Il faut distinguer cinq cas : $x < -2$, $-2 < x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 \leq x < 2$, $x > 2$.

(a) Pour $x < -2$ on a $|x| - 2 = -x - 2 > 0$ et $x + 1 < 0$, et l'inégalité peut donc être réécrite comme

$$x\,(x+1) \leq x\,(-x-2) \ ,$$

ce qui est vrai si $2x^2 + 3x = x(2x+3) \leq 0$. Cette inégalité n'est jamais satisfaite.

(b) Pour $-2 < x < -1$ on a $|x| - 2 = -x - 2 < 0$ et $x + 1 < 0$, et l'inégalité peut donc être réécrite comme

$$x\,(x+1) \geq x\,(-x-2) \ ,$$

ce qui est vrai si $2x^2+3x = x(2x+3) \geq 0$. Cette inégalité est satisfaite pour $-2 < x \leq -\frac{3}{2}$.

(c) Pour $-1 < x < 0$, on a $|x| - 2 = -x - 2 < 0$ et $x + 1 > 0$, et l'inégalité peut donc être réécrite comme

$$x\,(x+1) \leq x\,(-x-2) \ ,$$

ce qui est vrai si $2x^2 + 3x = x(2x+3) \leq 0$. Cette inégalité est satisfaite pour $-1 < x < 0$.

(d) Pour $0 \leq x < 2$ on a $|x| - 2 = x - 2 < 0$ et $x + 1 > 0$, et l'inégalité peut donc être réécrite comme

$$x\,(x+1) \leq -x\,(x-2) \ ,$$

ce qui est vrai si $2x^2 - x = x(2x-1) \leq 0$. Cette inégalité est satisfaite pour $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

(e) Pour $x > 2$ on a $|x| - 2 = x - 2 > 0$ et $x + 1 > 0$, et l'inégalité peut donc être réécrite comme

$$x\,(x+1) \geq -x\,(x-2)\ ,$$

ce qui est vrai si $2x^2 - x = x(2x-1) \geq 0$. Cette inégalité est satisfaite pour $x > 2$.

Pour résumer, l'inégalité est donc satisfaite pour

$$x \in \left]-2, -\frac{3}{2}\right] \bigcup \left]-1, \frac{1}{2}\right] \bigcup\ ]2, \infty[\ .$$

Exercice 8.

Le plus grand sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$

$$||x-1|-1| \leq ||x|-1|$$

est

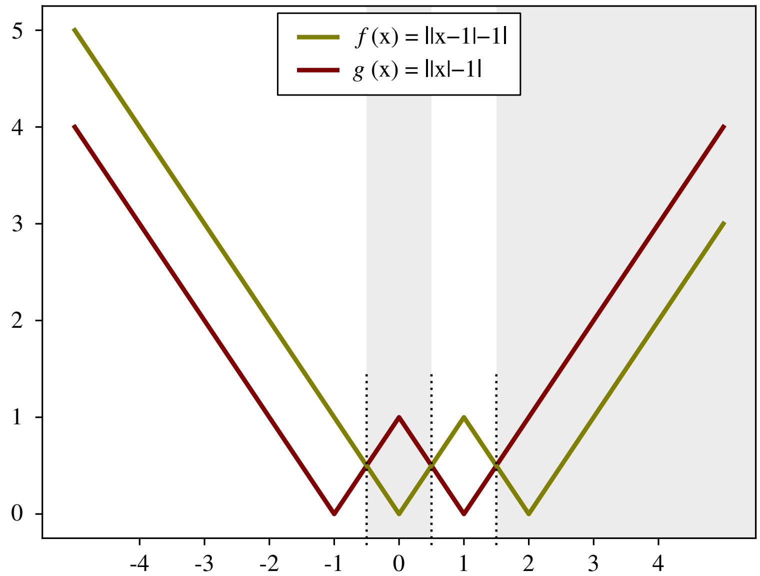
- ☐ $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right[$
- ☐ $\left[0, \frac{1}{2}\right] \cup [2, \infty[$
- ☐ $\left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cup]1, 2[$
- ☐ $\left[\frac{3}{2}, \infty\right[$

Solution :

☒ $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right[$

Le plus grand sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A,\quad ||x-1|-1| \leq ||x|-1|$ est $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right[$.

Ce resultat peut être interpreté, par exemple, à partir du graphe des fonctions $f : x \mapsto ||x-1|-1|$ et $g : x \mapsto ||x|-1|$:



Nous pouvons réécrire l'inégalité comme $(|x-1|-1)^2 \leq (|x|-1)^2$. En dévelopant, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
(|x-1|-1)^2 &\leq (|x|-1)^2 \\
|x-1|^2 - 2|x-1| + 1 &\leq |x|^2 - 2|x| + 1 \\
(x-1)^2 - 2|x-1| + 1 &\leq x^2 - 2|x| + 1 \\
x^2 - 2x + 1 - 2|x-1| + 1 &\leq x^2 - 2|x| + 1 \\
-2(x - |x|) - 2|x-1| + 1 &\leq 0
\end{aligned}$$

ce qui nous ramène à l'inégalité suivante :

$$(x - |x|) + |x-1| \geq \frac{1}{2}.$$

— Pour $x \geq 0$, nous avons $|x| = x$ et l'inégalité se simplifie en

$$|x-1| \geq \frac{1}{2},$$

ce qui est vrai si $x \leq \frac{1}{2}$ ou si $x \geq \frac{3}{2}$. Cette inégalité est satisfaite pour $x \in [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2}, \infty[$.

— Pour $x \leq 0$, nous avons $|x| = -x$, ainsi que $x - 1 \leq 0$ c'est-à-dire $|x-1| = -x+1$. L'inégalité se simplifie en

$$x + 1 \geq \frac{1}{2},$$

ce qui est vrai si $x \geq -\frac{1}{2}$. Cette inégalité est satisfaite pour $x \in [-\frac{1}{2}, 0]$.

Pour résumer, l'inégalité de départ est satisfaite pour :

$$x \in [-\tfrac{1}{2}, 0] \cup [0, \tfrac{1}{2}] \cup [\tfrac{3}{2}, \infty[\quad \text{ou encore} \quad x \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}] \cup [\tfrac{3}{2}, \infty[\ .$$

Exercice 9.
Trouver la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

(i) $(2-3i)(3+2i)$

(ii) $\dfrac{2-3i}{4-5i}$

(iii) $\dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1+2i} + \dfrac{1}{1+3i}$

(iv) $\dfrac{2-3i}{2+i} + \dfrac{1-i}{1+3i}$

(v) $\left(\dfrac{10-15i}{2+i}\right)\left(\dfrac{1+i}{1-3i}\right)$

Solution : Les résultats ci-après sont écrits sous la forme $z = a + ib$, avec $\text{Re}(z) = a$ et $\text{Im}(z) = b$.

(i) $z = (2-3i)(3+2i) = 12 - 5i$

(ii) $z = \dfrac{2-3i}{4-5i} = \dfrac{2-3i}{4-5i}\,\dfrac{4+5i}{4+5i} = \dfrac{23}{41} - i\,\dfrac{2}{41}$

(iii) $z = \dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1+2i} + \dfrac{1}{1+3i} = \dfrac{1-i}{2} + \dfrac{1-2i}{5} + \dfrac{1-3i}{10} = \dfrac{4}{5} - i\,\dfrac{6}{5}$

(iv) $z = \dfrac{2-3i}{2+i} + \dfrac{1-i}{1+3i} = \dfrac{(2-3i)(2-i)}{5} + \dfrac{(1-i)(1-3i)}{10} = 0 - 2i$

(v) $z = \left(\dfrac{10-15i}{2+i}\right)\left(\dfrac{1+i}{1-3i}\right) = (1-8i)\left(-\dfrac{1}{5} + i\,\dfrac{2}{5}\right) = 3 + 2i$

Exercice 10.
Trouver le module et l'argument des nombres complexes suivants :

(i) -2

(ii) $2+2i$

(iii) $-1 + i\sqrt{3}$

(iv) $-1 + i\tan(3)$

(v) $\dfrac{8i^{21} - 2i^{11}}{1-i}$

Solution :
Les résultats ci-dessous sont écrits sous la forme $z = \rho e^{i\phi}$, avec $|z| = \rho$ et $\arg(z) = \phi$.

(i) $z = -2 = 2(-1+0i) = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = 2e^{i\pi}$

(ii) $z = 2+2i = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\,(\cos(\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{\pi}{4})) = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

(iii) $z = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$

(iv) $z = -1 + i\tan(3) = -1 + i\,\dfrac{\sin(3)}{\cos(3)} = \dfrac{1}{|\cos(3)|}(\cos(3) - i\sin(3)) = \dfrac{1}{|\cos(3)|}\,e^{-3i}$

(v) $z = \dfrac{8i^{21} - 2i^{11}}{1-i} = \dfrac{8i - 2i^3}{1-i} = \dfrac{8i+2i}{1-i} = \dfrac{10i}{1-i} = 10i\,\dfrac{1+i}{2} = 5\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Exercice 11.
Dans la série 1, on avait rappelé les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
&\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \\
&\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\
&\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\
&2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) = \sin(x) - \sin(y)
\end{aligned}$$

Montrer ces formules à l'aide des formules d'Euler.

Solution :
On rappelle d'abord les formules d'Euler :

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\
\cos(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}
\end{aligned}$$

Commençons par la première. On a

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) + \cos^2(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}}{-4} + \frac{e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}}{4} \\
&= \frac{-e^{2ix} + 2 - e^{-2ix} + e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}}{4} = 1.
\end{aligned}$$

Passons à la deuxième. On a

$$\begin{aligned}
\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} + \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2} \\
&= \frac{1}{4i}\left(e^{ix}e^{iy} + e^{ix}e^{-iy} - e^{-ix}e^{iy} - e^{-ix}e^{-iy}\right) \\
&\quad + \frac{1}{4i}\left(e^{ix}e^{iy} - e^{ix}e^{-iy} + e^{-ix}e^{iy} - e^{-ix}e^{-iy}\right) \\
&= \frac{1}{4i}\left(2e^{i(x+y)} - 2e^{-i(x+y)}\right) \\
&= \frac{e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}}{2i} = \sin(x+y).
\end{aligned}$$

Passons par la troisième. On a

$$\begin{aligned}
\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} + \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{ix}e^{iy} + e^{ix}e^{-iy} + e^{-ix}e^{iy} + e^{-ix}e^{-iy}\right) \\
&\quad - \frac{1}{4i^2}\left(e^{ix}e^{iy} - e^{ix}e^{-iy} - e^{-ix}e^{iy} + e^{-ix}e^{-iy}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(2e^{i(x+y)} + 2e^{-i(x+y)}\right) \\
&= \frac{e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)}}{2} = \cos(x+y).
\end{aligned}$$

Finisson par la quatrième. On a

$$
\begin{aligned}
&2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) = 2\frac{e^{i\frac{x+y}{2}}+e^{-i\frac{x+y}{2}}}{2}\frac{e^{i\frac{x-y}{2}}-e^{-i\frac{x-y}{2}}}{2i}\\
=&\frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{x+y}{2}}e^{i\frac{x-y}{2}}-e^{i\frac{x+y}{2}}e^{-i\frac{x-y}{2}}+e^{-i\frac{x+y}{2}}e^{i\frac{x-y}{2}}-e^{-i\frac{x+y}{2}}e^{-i\frac{x-y}{2}}\right)\\
=&\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{iy}+e^{-iy}-e^{-ix})\\
=&\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}-\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}=\sin(x)-\sin(y).
\end{aligned}
$$

Exercice 12.
Le but de cet exercice est de se familiariser avec la "règle de grammaire" mentionnée dans le cours et comment l'appliquer dans l'écriture des mathématiques.
Soit $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x^2}$. On a alors que la propriété

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists M > 0 \text{ tel que } \forall x \geq M,\ |f(x)| \leq \varepsilon.$$

est vraie.
Ci-dessous, deux démonstration du résultat. Dans l'une d'elles, nous avons glissé deux erreurs.
Laquelle de ces deux démonstrations est correcte et où sont les problèmes ?

Remarque.
la propriété ci-dessus sera étudiée dans le chapitre 4, c'est-à-dire, vous n'êtes pas sensé · e comprendre ce que la propriété veut dire. Les problèmes dans la démonstration ne sont pas dûs à ce que la démonstration raconte, mais plutôt, dans la grammaire employée dans la démonstration.

Démonstration. On doit montrer qu'on peut trouver $M \geq 0$ tel que dès que $x \geq M$, $|f(x)| = \frac{1}{x^2} \leq \varepsilon$, quelque soit $\varepsilon > 0$.
Posons $M := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > 0$ et considérons $x \geq M$ quelconque. Alors,

$$|f(x)| = \frac{1}{x^2} \overset{x\geq M}{\leq} \frac{1}{M^2} \overset{M=1/\sqrt{\varepsilon}}{=} \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} = \varepsilon.$$

ε étant quelconque, on a le résultat voulu. □

Démonstration. On doit montrer que quelque soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver $M \geq 0$ tel que dès que $x \geq M$, $|f(x)| = \frac{1}{x^2} \leq \varepsilon$.
Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Posons $M := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > 0$ et considérons $x \geq M$ quelconque. Alors,

$$|f(x)| = \frac{1}{x^2} \overset{x\geq M}{\leq} \frac{1}{M^2} \overset{M=1/\sqrt{\varepsilon}}{=} \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} = \varepsilon,$$

ε étant quelconque, on a le résultat voulu. □

Solution :
Les deux problèmes dans la démonstration de gauche sont les suivants :

— Dans la reformulation de ce qu'il y a à montrer, "il existe $M \geq 0$ tel que dès que $x \geq M$, $|f(x)| = \frac{1}{x^2} \leq \varepsilon$ quelque soit $\varepsilon > 0$" vu que $\varepsilon > 0$ est mentionné *après* M, la grammaire mathématique nous indique que M ne dépend pas de ε tandis que ε peut a priori dépendre de M. Alors que dans l'énoncé de la propriété "$\forall\varepsilon > 0,\ \exists M > 0$ tel que $\forall x \geq M,\ |f(x)| \leq \varepsilon$", c'est l'inverse.

— Lorsqu'on pose $M := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, vu que ε n'a pas été mentionné avant, on ne sait pas si on est en train de définir M ou ε.

Morale de l'histoire : Dans l'examen vous aurez une démonstration du cours à redonner. Il est important, lorsque vous redonnez la démonstration que vous respectiez l'ordre dans lequel les choses sont écrites.