EPFL

Ens: O. Mila
Analyse I - (n/a)
15 janvier 2024
3h30

n/a

n/a

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - $+3$ points si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - $+1$ point si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$a_n = (-1)^{n+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{n}.$$

Alors :

- ☐ $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$ et $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$
- ☐ $\liminf_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{4}$ et $\limsup_{n\to\infty} a_n = \frac{7}{2}$
- ☐ $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{4}$ et $\limsup_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$
- ☐ $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$ et $\limsup_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$

Question 2 : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$, et soit $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Alors :

- ☐ $\inf A = 0$ et $\sup A = \frac{3}{2}$
- ☐ $\inf A = -1$ et $\sup A = 1$
- ☐ $\inf A = -1$ et $\sup A = \frac{3}{2}$
- ☐ $\inf A = 0$ et $\sup A = 1$

Question 3 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0\,, \\ 1 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

Alors :

- ☐ $f'(0) = 1$
- ☐ $f'(0) = \frac{1}{2}$
- ☐ f n'est pas dérivable en 0
- ☐ $f'(0) = e$

Question 4 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 2^x + x^2$. Alors :

- ☐ il existe $c \in]2, 3[$ tel que $f'(c) = 9$
- ☐ il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 9$
- ☐ il existe $c \in]3, 4[$ tel que $f'(c) = 9$
- ☐ il existe $c \in]1, 2[$ tel que $f'(c) = 9$

Question 5 : L'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi e^x \cos(2x)\,\mathrm{d}x$ vaut

- ☐ $\frac{1}{5}(e^\pi - 1)$
- ☐ $\frac{2}{5}(e^\pi - 1)$
- ☐ $e^\pi - 1$
- ☐ 0

Question 6 : Soit I un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction, et $\mathrm{Im}(f)$ l'ensemble image de f. Parmi les affirmations ci-dessous, laquelle est vraie pour tous les choix possibles de I et de f ?

- ☐ Si I est fermé et borné et si $\mathrm{Im}(f)$ est ouvert, alors f n'est pas continue sur I.
- ☐ Si I est borné et si $\mathrm{Im}(f)$ est fermé et si f est continue sur I, alors I est fermé.
- ☐ Si I est fermé et borné et si $\mathrm{Im}(f)$ est fermé, alors f est continue sur I.
- ☐ Si I est borné et si $\mathrm{Im}(f)$ est borné, alors f est continue sur I.

Question 7 : Soit la série avec paramètre $x \in \,]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$ définie par

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log(x))^n}\,.$$

Alors la série converge si et seulement si

- ☐ $x \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$
- ☐ $x \in \left]0, \frac{1}{e}\right[\cup \left]e, +\infty\right[$
- ☐ $x \in \,]e, +\infty[$
- ☐ $x \in \left]\frac{1}{e}, 1\right[\cup \left]1, e\right[$

Question 8 : L'intégrale $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$ vaut

- ☐ $\log(6)$
- ☐ $\log\left(\dfrac{3}{8}\right)$
- ☐ $\log\left(\dfrac{4}{3}\right)$
- ☐ $\log\left(\dfrac{3}{2}\right)$

Question 9 : Une des solutions de l'équation $z^5 = \left(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)^2$ est

- ☐ $z = \sqrt[5]{4}\,\left(\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{15}\right)\right)$
- ☐ $z = \sqrt[5]{4}\,\left(\cos\left(\frac{16\pi}{15}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{16\pi}{15}\right)\right)$
- ☐ $z = \sqrt[5]{2}\,\left(\cos\left(\frac{16\pi}{15}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{16\pi}{15}\right)\right)$
- ☐ $z = \sqrt[5]{2}\,\left(\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{15}\right)\right)$

Question 10 : Soit $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = (x+1)\sin(x) + \cos(x) + e^{\sin(x)}.$$

Alors, l'ensemble image de f est

- ☐ $[0, 2+\pi+e]$
- ☐ $\left[0, 1+\frac{\pi}{2}+e\right]$
- ☐ $[0,2]$
- ☐ $[\pi-2, 2]$

Question 11 : Le domaine de convergence de la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n+1}(x-1)^n$$

est

- ☐ $\left]\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right[$
- ☐ $\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$
- ☐ $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right[$
- ☐ $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$

Question 12 : Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$x_n = \left(\cos\left(\sqrt{\tfrac{2}{n}}\right)\right)^n.$$

Alors la limite $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ vaut

- ☐ 1
- ☐ $\dfrac{1}{e}$
- ☐ e
- ☐ 0

Question 13 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{|x|} & \text{si } x \neq 0\,, \\ 1 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

Alors :

- ☐ f est continue sur $\mathbb{R}$, mais pas dérivable en $x = 0$
- ☐ f est dérivable en $x = 0$
- ☐ f est dérivable à droite en $x = 0$
- ☐ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe mais f n'est pas continue en $x = 0$

Question 14 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^{1+x-\cos(x)}$. Le développement limité d'ordre 3 de f autour de $x_0 = 0$ est donné par

- ☐ $f(x) = 1 - x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$
- ☐ $f(x) = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$
- ☐ $f(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$
- ☐ $f(x) = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$

Question 15 : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$, $u_n = -\frac{2}{3}u_{n-1} + 2$. Alors :

- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{6}{5}$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$

Question 16 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \left|4 - x^2\right| & \text{si } x \leq 0\,, \\ 4\left|x^2 - 1\right| & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$$

Alors :

- ☐ f n'est pas continue en $x = 1$
- ☐ f n'est pas continue en $x = 0$
- ☐ f n'est pas continue en $x = -2$
- ☐ f est continue sur $\mathbb{R}$

Question 17 : Soit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = (-1)^k \dfrac{k+2}{k^3}$ et soit $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Alors :

- ☐ la série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolument
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$
- ☐ la série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, mais ne converge pas absolument

Question 18 : L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$ vaut

- [ ] $\dfrac{\pi}{2}$
- [ ] $2\arctan(e)$
- [ ] 1
- [ ] $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$, $a_n = f(a_{n-1})$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone. Alors f est surjective.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : La fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \displaystyle\int_0^t |x|\,\mathrm{d}x$ est dérivable en $t = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : Si la série entière $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-5)^k$ converge pour $x = 2$, alors elle converge pour $x = 6$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 23 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction avec le développement limité d'ordre 2 autour de $x_0 = 0$ donné par $f(x) = a + bx + cx^2 + x^2\varepsilon(x)$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si f est dérivable en $x_0 = 0$, alors $f'(0) = b$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{Re}\,(z_1 \cdot z_2) = 0$. Alors $\mathrm{Re}\,(z_1) \cdot \mathrm{Re}\,(z_2) = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soit $f\colon\ ]0,1[\ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\uparrow 1} f(x) = 0$, alors f est bornée.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Soient A et B deux sous-ensembles bornés non-vides de $\mathbb{R}$. Si $\inf A > \sup B$, alors $A \cap B$ est vide.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que la limite de la suite $\big(f(\frac{1}{n})\big)_{n\geq 1}$ vaut $f(0)$. Alors f est continue en $x_0 = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 28 : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres strictement négatifs. Alors, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument si et seulement si elle converge.

☐ VRAI ☐ FAUX

Troisième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 29: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 *Réservé au correcteur*

(a) Donner la définition de l'ensemble $\mathcal{C}^5(\mathbb{R})$.

(b) Donner la série de Taylor centrée en $a = 7$ de la fonction $f(x) = e^x$.

Question 30: *Cette question est notée sur 12 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10 ☐11 ☐12 *Réservé au correcteur*

Remarque: Chaque sous-question (a), (b), ... peut être résolue indépendamment des autres.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lim_{x \downarrow 0} x^{100} \log(x)^k = 0$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale généralisée $\mathbf{I}_n = \int_{0^+}^{1} x^{99} \log(x)^n \, \mathrm{d}x$. En utilisant (a), montrer que

$$\mathbf{I}_n = -\frac{n}{100} \mathbf{I}_{n-1} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

(c) En utilisant (b), montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\mathbf{I}_n = (-1)^n \frac{n!}{100^{n+1}}.$$

(On rappelle que $0! = 1$ *et* $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ *si* $n \geq 1$*.)*

(d) La série $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{I}_n$ converge-t-elle? Justifier.