EPFL

Ens: D. Strütt
Analyse I - XYZ
17 janvier 2022
3 heures

1

Lennon John

SCIPER : **XXXXX1**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages (les dernières pouvant être vides), et 31 questions. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  $+3$ points si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  $+1$ point si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Correction

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{1-} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$

- ■ diverge
- □ converge et vaut 0
- □ converge et vaut -1
- □ converge et vaut 1

Question 2 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + \sin(x)$, et soit $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa fonction réciproque. Alors au point $y_0 = f(\pi)$:

- □ $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = -\dfrac{1}{3}$
- ■ $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = 1$
- □ $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{2\pi - 1}$
- □ f^{-1} n'est pas dérivable

Question 3 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres réels définie par $a_n = \dfrac{(-2)^n (n!)^2}{(2n)!}$. Alors la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est:

- □ convergente mais pas absolument convergente
- □ divergente car $|a_n| \to +\infty$
- ■ absolument convergente
- □ divergente car $|a_n| \to 1$

Question 4 : La série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+4}}(x+1)^n$ converge si et seulement si $x \in I$, où:

- ■ $I = \left]-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right[$
- □ $I = \left[-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right]$
- □ $I = \left]-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right]$
- □ $I = \left]\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right]$

Question 5 : Soit $I = [-3, 0]$ et $f : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 3\mathrm{e}^{\frac{x+3}{3}} - 2$. Alors pour tout $x, y \in I$ tels que $x < y$ on a:

- ■ $1 \leq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 3$
- □ $-\infty < \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 0$
- □ $3 \leq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 3\mathrm{e}$
- □ $2 \leq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \mathrm{e}$

Correction

Question 6 : Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x^2 - 10x - 15}{x^2 - x - 6} & \text{si } x > 3\,, \\ a & \text{si } x = 3\,, \\ bx^2 + 1 & \text{si } 0 \le x < 3\,. \end{cases}$$

Alors f est continue sur $[0,+\infty[$ pour:

☐ $a = 5,\ b = \frac{4}{9}$ ☐ $a = 0,\ b = -\frac{1}{9}$ ☐ $a = 4,\ b = 3$ ■ $a = 4,\ b = \frac{1}{3}$

Question 7 : L'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\,(x^2+3)}\,\mathrm{d}x$ vaut:

☐ $\frac{1}{3}\operatorname{Log}(2) - \frac{1}{9}\operatorname{Log}\left(\frac{7}{4}\right)$
☐ $\operatorname{Log}(2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctg}(2)$
☐ $\operatorname{Log}(4) + \operatorname{Log}\left(\frac{7}{2}\right)$
■ $\frac{1}{3}\operatorname{Log}(2) - \frac{1}{6}\operatorname{Log}\left(\frac{7}{4}\right)$

Question 8 : Soit $f\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \mathrm{e}^x\cos(x)$. Alors l'ensemble image de f est égal à

☐ $[0,1]$ ☐ $\left]0, \exp\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$ ☐ $]0,1]$ ■ $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\exp\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

Question 9 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $\forall x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{x\sin(x)}{\sqrt{x^2+1} - 1}\,.$$

Alors:

■ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = 2$
☐ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = +\infty$
☐ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{1}{2}$
☐ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = 0$

Question 10 : Soit $z = \dfrac{2\,\mathrm{i}^9 - 4\,\mathrm{i}^{15}}{1-\mathrm{i}}$. Alors:

☐ $z^6 = -8\cdot 3^6\,\mathrm{i}$ ■ $z^6 = 8\cdot 3^6\,\mathrm{i}$ ☐ $z^6 = 8\cdot 3^6$ ☐ $z^6 = 8\cdot 3^6(1+\mathrm{i})$

Question 11 : Soit $(a_n)_{n\ge 1}$ la suite définie par $a_n = \mathrm{e}^{-n}\,\mathrm{e}^{n^2\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)}$. Alors:

☐ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \mathrm{e}$
■ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$
☐ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$
☐ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Question 12 : Soit $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o\left(|x|^3\right)$ le développement limité d'ordre trois de la fonction $f(x) = e^{\sin(x)}$ autour de $x_0 = 0$. Alors a_3 est égal à:

☐ 1 ■ 0 ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ $\dfrac{1}{6}$

Question 13 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$a_n = \sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}\,.$$

Alors :

- ☐ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, et $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$
- ☐ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -1$, et $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
- ■ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, et $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
- ☐ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -1$, et $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

Question 14 : Soit $f\colon\ ]-1,1[\ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} t^n$. Alors:

☐ $f'(\frac{1}{2}) = 0$ ☐ $f'(\frac{1}{2}) = -5$ ■ $f'(\frac{1}{2}) = 3$ ☐ $f'(\frac{1}{2}) = 7$

Question 15 : Le développement limité d'ordre deux de la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}$ autour de $x_0 = 0$ est:

- ☐ $f(x) = \mathrm{e} + \mathrm{e}\,x + 3\mathrm{e}\,x^2 + o\left(|x|^2\right)$
- ■ $f(x) = \mathrm{e} + \mathrm{e}\,x + \frac{3}{2}\mathrm{e}\,x^2 + o\left(|x|^2\right)$
- ☐ $f(x) = \frac{5}{2} + 2x + 2x^2 + o\left(|x|^2\right)$
- ☐ $f(x) = \frac{5}{2} + 2x + 4x^2 + o\left(|x|^2\right)$

Question 16 : L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{\sin(x)}\cos(x)\,\mathrm{d}x$ vaut:

☐ e ☐ 0 ☐ 1 ■ $\mathrm{e}-1$

Question 17 : Soit $A = \left\{y \in \mathbb{R} :\ \exists x \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } y = e^{-x}\right\}$. Alors

- ■ $\operatorname{Sup} A = 1$
- ☐ A n'est pas majoré
- ☐ $\operatorname{Sup} A = \mathrm{e}$
- ☐ $\operatorname{Inf} A = 1$

Question 18 : Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $x_0 = 3$ et, pour $n \geq 1$, $x_n = \frac{3}{4}x_{n-1} + 2$. Alors:

- ■ $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 8$
- ☐ $(x_n)_{n\geq 0}$ diverge
- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2$
- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 3$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : Il existe une fonction bijective et continue $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non-vide, et soit $B = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$. Si A est majoré, alors B est majoré.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 21 : Si la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-3)^k$ converge pour $x = 2.8$, alors elle converge aussi pour $x = 3.1$.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 23 : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Alors $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 24 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction infiniment dérivable, $n \in \mathbb{N}^*$, et $f(x) = p_n(x) + o(|x|^n)$ le développement limité de f d'ordre n autour de zéro, où $p_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ est un polynôme. Alors

$$f'(0) = p'(0)\,, \quad f^{(2)}(0) = p_n^{(2)}(0)\,, \quad f^{(3)}(0) = p_n^{(3)}(0)\,, \quad \ldots \quad , \quad f^{(n)}(0) = p_n^{(n)}(0)$$

■ VRAI ☐ FAUX

Correction

Question 25 : Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions continûment dérivables, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Alors:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = -\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

☐ VRAI ■ FAUX

Question 26 : Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(-1) = f(1)$. Alors il existe $x_0 \in \,]-1,1[$ tel que $f'(x_0) = 0$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 27 : Il existe une fonction continue $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^+$ telle que $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 28 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy.

■ VRAI ☐ FAUX

Troisème partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 29: *Cette question est notée sur 2 points.*

☐ 0 ☐ 1 ■ 2 *Réservé au correcteur*

(a) Soit $a \in \mathbb{R}$, $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite. Donner la définition de

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

(b) Soit $D \subset \mathbb{R}$, $a, x_0 \in \mathbb{R}$ et $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0. Donner la définition de

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$$

Question 30: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6 *Réservé au correcteur*

Énoncer et montrer le théorème des accroissements finis.

Correction

Question 31: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ■ 8 *Réservé au correcteur*

Soit

$$\begin{aligned} f\colon\ \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \mathrm{Log}(x) - \mathrm{Log}(2). \end{aligned}$$

(a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n}.$$

(b) Écrire la série de Taylor de f autour de $x_0 = 2$ et donner son rayon de convergence.

Correction

Correction