

**EPFL**

Ens: L. Vela Arevalo  
Analyse I - (n/a)  
11 janvier 2021  
3 heures

n/a

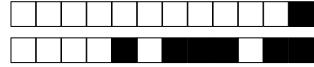
n/a

SCIPER: **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 8 pages (les dernières pouvant être vides), et 34 questions. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - +3 points si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - +1 point si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes   Read these guidelines   Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse   select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse   NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse   Correct an answer Antwort korrigieren
<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> 
ce qu'il ne faut <b>PAS</b> faire   what should <b>NOT</b> be done   was man <b>NICHT</b> tun sollte		
		



## Partie commune, 23 questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

**Question 1 :** Pour toute fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  qui admet en  $x = 0$  un point de minimum local, on a :

$f'(0) = 0$  et  $f''(0) \neq 0$

$f'(0) \neq 0$  et  $f''(0) \neq 0$

$f'(0) = 0$  et  $f''(0) \geq 0$

$f'(0) = 0$  et  $f''(0) \leq 0$

**Question 2 :** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0, \\ \sqrt{1 - x^2} & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Alors :

$f$  est dérivable en  $x = 0$  et continue en  $x = 1$

$f$  est dérivable à gauche en  $x = 0$  et dérivable en  $x = 1$

$f$  est continue en  $x = 0$  et dérivable en  $x = 1$

$f$  est dérivable à droite en  $x = 0$  et dérivable à gauche en  $x = 1$

**Question 3 :** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = x^3$ . Soit  $f_1 = f$  et, pour tout  $n \geq 2$ ,  $f_n = f \circ f_{n-1}$ . Alors pour tout  $n \geq 1$  :

$f_n(x) = nx^3$         $f_n(x) = x^{(3n)}$         $f_n(x) = (3x)^n$         $f_n(x) = x^{(3^n)}$

**Question 4 :** Soit  $c \in \mathbb{R}$ , et  $(a_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} \quad \text{si } n \text{ est pair,} \quad a_n = \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)^c \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

Alors :

$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m} = +\infty$

la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  converge pour exactement une valeur de  $c$

$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m+1} = c$

la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  diverge quelle que soit la valeur de  $c$



**Question 5 :** Soit  $f: ]-\pi, \pi[ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{\text{Arctg}(x^2)}{x \sin(x)}$ . Alors :

- $f$  admet un prolongement par continuité en  $x = 0$ , noté  $\hat{f}$ , et  $\hat{f}(0) = 0$ .
- $f$  admet un prolongement par continuité en  $x = 0$ , noté  $\hat{f}$ , et  $\hat{f}(0) = 1$ .
- $f$  admet un prolongement par continuité en  $x = 0$ , noté  $\hat{f}$ , et  $\hat{f}(0) = \frac{\pi}{2}$ .
- $f$  n'admet pas de prolongement par continuité en  $x = 0$  car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ .

**Question 6 :** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = x^2 \sin(x^2)$ , et  $I \subset \mathbb{R}$  son ensemble image,

$$I = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = y\}.$$

Alors :

- $I = [0, +\infty[$
- $I = [0, 1]$
- $I = \mathbb{R}$
- $I = [-1, 1]$

**Question 7 :** Soit  $A$  l'ensemble défini par  $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < \text{Arctg}(\frac{1}{x}) < \frac{\pi}{4}\}$ . Alors :

- $A = ]0, 1[$
- $A$  n'est pas borné
- $A = ]1, \frac{\pi}{2}[$
- $\text{Inf } A = \frac{\pi}{2}$

**Question 8 :** Soit la série avec paramètre  $b \in \mathbb{R}$  définie par :

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \left( b + \frac{1}{k} \right)^k$$

Alors  $s$  converge pour tout :

- $b \leq 1$
- $b \in ]-1, 1[$
- $b < 1$
- $b \in ]-1, 1]$

**Question 9 :** Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

est dérivable en  $x = 0$ . Alors :

- $f(-3) = \frac{3}{8}$
- $f(-3) = -\frac{3}{8}$
- $f(-3) = \frac{7}{8}$
- $f(-3) = \frac{1}{4}$

**Question 10 :** Parmi les fonctions

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{Arctg}(x) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

lesquelles sont continues en  $x = 0$ ?

- $f$  et  $g$
- ni  $f$ , ni  $g$
- $g$ , mais pas  $f$
- $f$ , mais pas  $g$



**Question 11 :** L'intégrale  $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(x) dx$  vaut

$\frac{3\pi}{2}$

$-\pi$

$2\pi$

$0$

**Question 12 :** Soient les ensembles du plan complexe

$$A = \{z \in \mathbb{C} : z^2 (|z| - 2) = 0\}, \quad B = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 1\}.$$

Alors :

- $A \cap B$  contient deux points
- $A \cap B$  contient exactement un point
- $A \cap B$  contient tous les points d'une droite
- $A \cap B$  est l'ensemble vide

**Question 13 :** La dérivée de la fonction  $f(x) = (1 + x^2)^{1+x^2}$  au point  $x = 1$  est égale à :

$8(\operatorname{Log}(2) + 1)$         $8$         $4$         $4(\operatorname{Log}(2) + 1)$

**Question 14 :** Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par  $a_n = \frac{(n+3)^{1/2} - n^{1/2}}{(n+1)^{-1/2}}$ . Alors :

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}$         $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$         $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$         $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$

**Question 15 :** Soit le nombre complexe  $z = 1 + \sqrt{3}i$ . Alors :

$z^{14} \in \mathbb{R}$         $\operatorname{Re}(z^8) > 0$         $|z^6| > 73$         $\operatorname{Im}(z^{11}) < 0$

**Question 16 :** Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par  $a_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Alors :

<input type="checkbox"/> $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ converge, mais $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge	<input type="checkbox"/> $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , mais $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge
<input type="checkbox"/> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, mais pas absolument	<input type="checkbox"/> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument

**Question 17 :** Pour toute fonction  $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue sur  $[0, 4]$  et dérivable sur  $]0, 4[$ , qui satisfait  $f'(x) \geq 2$  pour tout  $x \in ]0, 4[$ , on a :

<input type="checkbox"/> $0 \leq f(3) - f(2) \leq 1$	<input type="checkbox"/> $f(4) - f(1) \leq 4$
<input type="checkbox"/> $f(4) - f(0) \leq 1$	<input type="checkbox"/> $f(2) - f(0) \geq 4$



**Question 18 :** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = \sin(\sin(x))$ , et  $x_0 = 0$ . Alors le développement limité d'ordre cinq de  $f$  autour de  $x_0$  est donné par :

$f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + x^5\varepsilon(x)$

$f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + x^5\varepsilon(x)$

$f(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + x^5\varepsilon(x)$

$f(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + x^5\varepsilon(x)$

**Question 19 :** Soit  $f: ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(t) = \frac{1}{4+3t}$ , et  $t_0 = 0$ . Alors le développement limité d'ordre deux de  $f$  autour de  $t_0$  est donné par :

$f(t) = \frac{1}{4} - \frac{3}{16}t + \frac{9}{32}t^2 + t^2\varepsilon(t)$

$f(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16}t - \frac{9}{64}t^2 + t^2\varepsilon(t)$

$f(t) = \frac{1}{4} - \frac{3}{16}t + \frac{9}{64}t^2 + t^2\varepsilon(t)$

$f(t) = \frac{1}{4} - \frac{3}{16}t + \frac{9}{128}t^2 + t^2\varepsilon(t)$

**Question 20 :** L'intégrale généralisée  $\int_1^{2^-} \frac{x+1}{\sqrt{2-x}} dx$

converge et vaut  $\frac{8}{3}$

converge et vaut 4

converge et vaut  $\frac{16}{3}$

diverge

**Question 21 :** L'intervalle de convergence  $I$  de la série entière  $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} (x+1)^n$  est donné par :

$I = ]-2, 0[$

$I = [-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}]$

$I = ]-1, 1[$

$I = \mathbb{R}$

**Question 22 :** L'intégrale  $\int_0^1 x \sqrt{x^2 + 1} dx$  vaut

$3(2\sqrt{2} - 1)$

$\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$

$\frac{2\sqrt{2} - 1}{3}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$

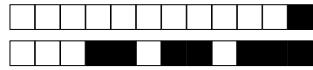
**Question 23 :** Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par  $a_n = \frac{(5n+1)^n}{n^n 5^n}$ . Alors :

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{\frac{1}{5}}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

**Partie commune, 11 questions du type Vrai ou Faux**

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

**Question 24 :** Soit  $f: ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction monotone, non-constante, et dérivable sur  $]0, 1[$ . Alors soit  $f'(x) \geq 0$  pour tout  $x \in ]0, 1[$ , soit  $f'(x) \leq 0$  pour tout  $x \in ]0, 1[$ .

VRAI       FAUX

**Question 25 :** Pour tout  $y \in \mathbb{R}$  donné,  $y \neq 0$ , l'équation  $z^4 = iy$  possède exactement quatre racines distinctes dans  $\mathbb{C}$ .

VRAI       FAUX

**Question 26 :** Soit  $(a_k)_{k \geq 0}$  une suite de nombres réels telle que pour tout  $k \geq 0$ ,  $a_k \neq 0$ , et telle que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 0$ . Alors la série entière  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  converge pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

VRAI       FAUX

**Question 27 :** Soit  $A \subset \mathbb{R}$ . Si  $\text{Inf } A \in A$  et  $\text{Sup } A \in A$ , alors  $A$  est un intervalle fermé.

VRAI       FAUX

**Question 28 :** Soient  $g$  et  $h$  deux fonctions dérivables sur  $]-1, 1[$ , telles que  $g(0) = h(0) = 0$ , et  $h'(x) \neq 0$  pour tout  $x \in ]-1, 1[$ . Si  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{h'(x)}$  n'existe pas, alors  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{h(x)}$  n'existe pas.

VRAI       FAUX

**Question 29 :** Soit  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que pour tout  $n \geq 1$ ,  $f(n) > n$ . Alors la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$  converge.

VRAI       FAUX



**Question 30 :** Si  $(x_n)_{n \geq 0}$  est une suite de nombres réels telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , alors elle ne possède aucune sous-suite bornée.

VRAI       FAUX

**Question 31 :** Soit une fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . S'il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ , alors  $f$  n'est pas continue sur  $\mathbb{R}$ .

VRAI       FAUX

**Question 32 :** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction possédant un développement limité d'ordre deux autour de zéro, donné par  $f(x) = a + bx + cx^2 + x^2\varepsilon(x)$ . Alors le développement limité d'ordre deux de  $g(x) = f(x)^3$  autour de zéro est donné par  $g(x) = a^3 + b^3x + c^3x^2 + x^2\varepsilon(x)$ .

VRAI       FAUX

**Question 33 :** Soient  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$  deux suites convergentes avec  $b_n \neq 0$  pour tout  $n \geq 0$ . Alors la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$  existe.

VRAI       FAUX

**Question 34 :** Soient  $(a_n)_{n \geq 1}$  une suite de nombres réels telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, et  $(b_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par

$$b_n = \int_0^{a_n} f(x) \, dx, \quad n \geq 1.$$

Alors  $(b_n)_{n \geq 1}$  est une suite convergente.

VRAI       FAUX