



Enseignante : A. Lachowska - Analyse I - (n/a)

16 janvier 2017 - durée : 3 heures




n/a

n/a

SCIPER : 999999

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

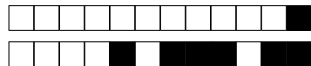
- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Respectez les consignes suivantes pour **marquer vos réponses** :

 oui | ja | sì | yes



non | nein | non | no



**Première partie, questions à choix multiple**

Pour chaque question mettre une croix dans la case correspondant à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : Soit la suite de nombres réels (a_n) définie récursivement par

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad a_{n+1} = 2a_n + 1, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors

- ☐ $a_n = 2n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
- ☐ $a_n = 2^{n+1} - 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
- ☐ $a_n = (n + 1)^2 - n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
- ☐ $a_n = 1 + \frac{1}{3}n(n^2 + 5)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Question 2 : La limite $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x e^x} - \frac{1}{x e^{2x}} \right)$ vaut

- ☐ $-\infty$
- ☐ 1
- ☐ $+\infty$
- ☐ 0

Question 3 : L'ensemble des nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^4 - \bar{z} = 0$ contient

- ☐ exactement 2 éléments
- ☐ un nombre infini d'éléments
- ☐ exactement 6 éléments
- ☐ exactement 4 éléments

Question 4 : Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ et la fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$. Si $h = f \circ g$, alors

- ☐ $h'(1) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$
- ☐ $h'(1) = -\frac{\pi}{4}$
- ☐ $h'(1) = \frac{\pi}{4}$
- ☐ $h'(1) = -\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$



Question 5 : Soit la fonction $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 4(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}}.$$

Alors

- ☐ f est convexe sur l'intervalle $] -1, 2[$ et admet un point d'inflexion en $x = 8$
- ☐ f est convexe sur l'intervalle $] -1, 2[$ et atteint un maximum local en $x = 8$
- ☐ f est concave sur l'intervalle $] 2, +\infty[$ et atteint un minimum local en $x = 8$
- ☐ f est concave sur l'intervalle $] -1, +\infty[$ et atteint un maximum local en $x = 8$

Question 6 : Soit la série avec un paramètre $t \in \mathbb{R}$ définie par

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\cos(t\pi))^n.$$

Alors

- ☐ la série converge pour tout $t \in \mathbb{R}$
- ☐ la série converge pour tout $t \notin \mathbb{Z}$
- ☐ la série diverge pour tout $t \in \mathbb{R}$
- ☐ la série converge seulement pour un nombre fini de valeurs de t

Question 7 : Soit la suite de nombres réels (a_n) définie récursivement par

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{3} + \frac{a_n^2}{3}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors

- ☐ la suite converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{2}{3}$
- ☐ la suite converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2$
- ☐ la suite converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$
- ☐ la suite ne converge pas

Question 8 : L'intégrale $\int_5^7 \frac{8}{x^2 + 2x - 15} dx$ vaut

- ☐ $\log\left(\frac{5}{3}\right)$
- ☐ $\log\left(\frac{3}{5}\right)$
- ☐ $\log\left(\frac{13}{6}\right)$
- ☐ $8 \log\left(\frac{13}{6}\right)$



Question 9 : Soit l'ensemble borné non vide $A = \left\{ x \in [0, 4\pi] : \cos(x) < \frac{1}{4} \right\}$
et $b = \sup A$. Alors

☐ $\sin(b) = \frac{1}{4}$

☐ $\cos(b) < \frac{1}{4}$

☐ $b < 2\pi$

☐ $\cos(b) = \frac{1}{4}$

Question 10 : Soit la fonction $f:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$

Alors

☐ $f'(\frac{1}{2}) = 2$

☐ $f'(\frac{1}{2}) = 1$

☐ f n'est pas dérivable en $x = \frac{1}{2}$

☐ $f'(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$

Question 11 : L'intégrale $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx$ vaut

☐ $\frac{2}{\sqrt{e}}$

☐ $\frac{\sqrt{e}}{2}$

☐ $e - \frac{\sqrt{e}}{2}$

☐ \sqrt{e}

Question 12 : L'intégrale généralisée $\int_e^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^2} dx$

☐ vaut $\frac{3}{e}$

☐ vaut $\frac{1}{e}$

☐ est divergente

☐ vaut $\frac{2}{e}$



Question 13 : La série numérique définie par $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

☐ diverge

☐ diverge, mais la série alternée $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ converge

☐ converge vers un nombre réel s tel que $s < 3$

☐ converge vers un nombre réel s tel que $s \geq 3$

Question 14 : Soit la suite de nombres réels (a_n) définie par

$$a_n = \frac{\sqrt[4]{5} - 4}{\sqrt[5]{4} - 5}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Alors

☐ la suite converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{3}{4}$

☐ la suite converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{4}{5}$

☐ la suite converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{5}{4}$

☐ la suite diverge

Question 15 : Soit $p \in \mathbb{R}$ un nombre quelconque.

☐ La série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^p}$ converge absolument pour tout $p > 0$

☐ La série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^p}$ converge pour tout $p > 0$

☐ La série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\log(n+2)}{(n+1)^p}$ diverge pour tout $p > 0$

☐ La série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^p(n+2)^p}$ converge pour tout $p > 0$

Question 16 : Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x^3 + 3x^2$.

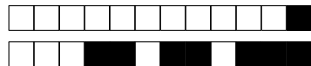
Alors l'image de l'intervalle $[-2, 0]$ est

☐ $[-4, 0]$

☐ $[-4, 1[$

☐ $[-4, 1]$

☐ $[-4, 0] \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$



Question 17 : L'ensemble des nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^3 = 27i$ est

- ☐ $\left\{ 3i, \frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}i), -\frac{3}{2}(1 + \sqrt{3}i) \right\}$
- ☐ $\left\{ -3i, \frac{3}{2}(1 + \sqrt{3}i), -\frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}i) \right\}$
- ☐ $\left\{ 3i, \frac{3}{2}(\sqrt{3} - i), -\frac{3}{2}(\sqrt{3} + i) \right\}$
- ☐ $\left\{ -3i, \frac{3}{2}(\sqrt{3} + i), -\frac{3}{2}(\sqrt{3} - i) \right\}$

Question 18 : Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{3x - \sin(x^2)}$ et le polynôme de Taylor d'ordre 2 de f autour de $x_0 = 0$,

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad \text{avec } a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Alors le coefficient a_2 vaut

- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ 8
- ☐ 4
- ☐ $\frac{7}{2}$

Question 19 : L'intégrale $\int_0^1 \frac{2x^3}{(1+x^4)^3} dx$ vaut

- ☐ $\frac{1}{4}$
- ☐ $\frac{3}{16}$
- ☐ $-\frac{1}{4}$
- ☐ $-\frac{3}{16}$

Question 20 : La limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) - (\sin(x))^2}{x^4}$ vaut

- ☐ $-\frac{1}{3}$
- ☐ $\frac{1}{3}$
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ 0



Question 21 : Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 3x - a & \text{si } x \leq \frac{\pi}{2} \\ bx^2 + \cos(x) & \text{si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} si

☐ $a = \frac{\pi}{3}$ et $b = \frac{3}{\pi}$

☐ $a = \frac{3\pi}{4}$ et $b = \frac{3}{\pi}$

☐ $a = \frac{\pi}{2}$ et $b = \frac{4}{\pi}$

☐ $a = \frac{5\pi}{4}$ et $b = \frac{4}{\pi}$

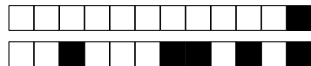
Question 22 : La limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x + \sqrt{3x + \sqrt{5x}}}}$

☐ vaut 0

☐ vaut $\frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{5}}}}$

☐ vaut $\frac{1}{\sqrt{2}}$

☐ n'existe pas

**Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux**

Pour chaque question, mettre une croix (sans faire de ratures) dans la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 23 : L'intégrale $\int_{-a}^a \sin(\operatorname{tg}(x)) dx$ est nulle pour tout $a \in [-1, 1]$.

☐

VRAI

☐

FAUX

Question 24 : Soit la suite de nombres réels (x_n) définie récursivement par

$$x_0 = 0 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \frac{4}{5 - x_n}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors $x_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

☐

VRAI

☐

FAUX

Question 25 : Si une fonction $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est telle que $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0$, alors la

série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} f\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge.

☐

VRAI

☐

FAUX

Question 26 : Soit deux sous-ensembles bornés non vides A et B de \mathbb{R} tels que $A \subset B$ et $A \neq B$. Alors $\operatorname{Sup} A < \operatorname{Sup} B$.

☐

VRAI

☐

FAUX

Question 27 : Si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est une série numérique convergente et (b_n) est une suite

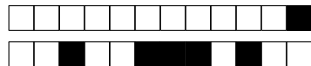
bornée de nombres réels, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ est une série numérique convergente.

☐

VRAI

☐

FAUX



Question 28 : Soit deux suites bornées de nombres réels (x_n) et (y_n) telles que $x_n \leq y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup x_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup y_n$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 29 : Soit la fonction $f:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \log(\cos(x))$. Alors f admet un maximum local en $x = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 30 : Soit deux suites de nombres réels (x_n) et (y_n) telles que les propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i) $x_n \leq y_n$ pour tout n pair,
- (ii) $x_n \geq y_n$ pour tout n impair.

Si la suite (x_n) converge, alors la suite (y_n) converge aussi.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 31 : Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0, 3]$ et dérivable en tout point de l'intervalle $]0, 3[$, telle que $g(0) = -4$ et $g(3) = 2$. Alors il existe $c \in]0, 3[$ tel que $g'(c) = 2$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 32 : Soit la fonction bijective $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 7 - 10x - \sin(x) - \sin(4x)$$

et sa fonction réciproque $g = f^{-1}$, qui est dérivable sur \mathbb{R} . Alors $g'(7) = -\frac{1}{15}$.

☐ VRAI ☐ FAUX



+1/12/49+