



Enseignante : A. Lachowska - Analyse I - (n/a)

16 janvier 2017 - durée : 3 heures

n/a

n/a

SCIPER : 999999

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

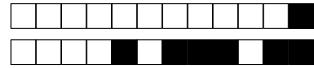
- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - +3 points si la réponse est correcte,
  - 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
  - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - +1 point si la réponse est correcte,
  - 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
  - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Respectez les consignes suivantes pour **marquer vos réponses** :

 oui | ja | sì | yes



 non | nein | non | no





## Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question mettre une croix dans la case correspondant à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

**Question 1 :** Soit la suite de nombres réels  $(a_n)$  définie récursivement par

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad a_{n+1} = 2a_n + 1, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors

- $a_n = 2n + 1, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$
- $a_n = 2^{n+1} - 1, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$
- $a_n = (n + 1)^2 - n, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$
- $a_n = 1 + \frac{1}{3}n(n^2 + 5), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$

**Question 2 :** La limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x e^x} - \frac{1}{x e^{2x}} \right)$  vaut

- $-\infty$
- $1$
- $+\infty$
- $0$

**Question 3 :** L'ensemble des nombres  $z \in \mathbb{C}$  tels que  $z^4 - \bar{z} = 0$  contient

- exactement 2 éléments
- un nombre infini d'éléments
- exactement 6 éléments
- exactement 4 éléments

**Question 4 :** Soit la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2$  et la fonction  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ . Si  $h = f \circ g$ , alors

- $h'(1) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$
- $h'(1) = -\frac{\pi}{4}$
- $h'(1) = \frac{\pi}{4}$
- $h'(1) = -\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$



**Question 5 :** Soit la fonction  $f : ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = 4(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}}.$$

Alors

- $f$  est convexe sur l'intervalle  $]-1, 2[$  et admet un point d'inflexion en  $x = 8$
- $f$  est convexe sur l'intervalle  $]-1, 2[$  et atteint un maximum local en  $x = 8$
- $f$  est concave sur l'intervalle  $]2, +\infty[$  et atteint un minimum local en  $x = 8$
- $f$  est concave sur l'intervalle  $]-1, +\infty[$  et atteint un maximum local en  $x = 8$

**Question 6 :** Soit la série avec un paramètre  $t \in \mathbb{R}$  définie par

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\cos(t\pi))^n.$$

Alors

- la série converge pour tout  $t \in \mathbb{R}$
- la série converge pour tout  $t \notin \mathbb{Z}$
- la série diverge pour tout  $t \in \mathbb{R}$
- la série converge seulement pour un nombre fini de valeurs de  $t$

**Question 7 :** Soit la suite de nombres réels  $(a_n)$  définie récursivement par

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{3} + \frac{a_n^2}{3}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors

- la suite converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{2}{3}$
- la suite converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2$
- la suite converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$
- la suite ne converge pas

**Question 8 :** L'intégrale  $\int_5^7 \frac{8}{x^2 + 2x - 15} dx$  vaut

- $\log\left(\frac{5}{3}\right)$
- $\log\left(\frac{3}{5}\right)$
- $\log\left(\frac{13}{6}\right)$
- $8 \log\left(\frac{13}{6}\right)$



**Question 9 :** Soit l'ensemble borné non vide  $A = \left\{ x \in [0, 4\pi] : \cos(x) < \frac{1}{4} \right\}$  et  $b = \text{Sup } A$ . Alors

- $\sin(b) = \frac{1}{4}$
- $\cos(b) < \frac{1}{4}$
- $b < 2\pi$
- $\cos(b) = \frac{1}{4}$

**Question 10 :** Soit la fonction  $f: ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$

Alors

- $f'(\frac{1}{2}) = 2$
- $f'(\frac{1}{2}) = 1$
- $f$  n'est pas dérivable en  $x = \frac{1}{2}$
- $f'(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$

**Question 11 :** L'intégrale  $\int_1^2 \frac{e^x}{x^3} dx$  vaut

- $\frac{2}{\sqrt{e}}$
- $\frac{\sqrt{e}}{2}$
- $e - \frac{\sqrt{e}}{2}$
- $\sqrt{e}$

**Question 12 :** L'intégrale généralisée  $\int_e^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^2} dx$

- vaut  $\frac{3}{e}$
- vaut  $\frac{1}{e}$
- est divergente
- vaut  $\frac{2}{e}$



**Question 13 :** La série numérique définie par  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

- diverge
- diverge, mais la série alternée  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$  converge
- converge vers un nombre réel  $s$  tel que  $s < 3$
- converge vers un nombre réel  $s$  tel que  $s \geq 3$

**Question 14 :** Soit la suite de nombres réels  $(a_n)$  définie par

$$a_n = \frac{\sqrt[4n]{5-4}}{\sqrt[5n]{4-5}}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Alors

- la suite converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{3}{4}$
- la suite converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{4}{5}$
- la suite converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{5}{4}$
- la suite diverge

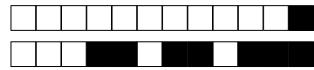
**Question 15 :** Soit  $p \in \mathbb{R}$  un nombre quelconque.

- La série numérique  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^p}$  converge absolument pour tout  $p > 0$
- La série numérique  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^p}$  converge pour tout  $p > 0$
- La série numérique  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\log(n+2)}{(n+1)^p}$  diverge pour tout  $p > 0$
- La série numérique  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^p(n+2)^p}$  converge pour tout  $p > 0$

**Question 16 :** Soit la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 2x^3 + 3x^2$ .

Alors l'image de l'intervalle  $[-2, 0]$  est

- $[-4, 0]$
- $[-4, 1[$
- $[-4, 1]$
- $[-4, 0] \setminus \{-\frac{3}{2}\}$



**Question 17 :** L'ensemble des nombres  $z \in \mathbb{C}$  tels que  $z^3 = 27i$  est

- $\left\{ 3i, \frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}i), -\frac{3}{2}(1 + \sqrt{3}i) \right\}$
- $\left\{ -3i, \frac{3}{2}(1 + \sqrt{3}i), -\frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}i) \right\}$
- $\left\{ 3i, \frac{3}{2}(\sqrt{3} - i), -\frac{3}{2}(\sqrt{3} + i) \right\}$
- $\left\{ -3i, \frac{3}{2}(\sqrt{3} + i), -\frac{3}{2}(\sqrt{3} - i) \right\}$

**Question 18 :** Soit la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = e^{3x - \sin(x^2)}$  et le polynôme de Taylor d'ordre 2 de  $f$  autour de  $x_0 = 0$ ,

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad \text{avec } a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Alors le coefficient  $a_2$  vaut

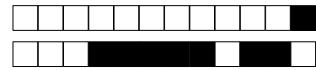
- $\frac{1}{2}$
- 8
- 4
- $\frac{7}{2}$

**Question 19 :** L'intégrale  $\int_0^1 \frac{2x^3}{(1 + x^4)^3} dx$  vaut

- $\frac{1}{4}$
- $\frac{3}{16}$
- $-\frac{1}{4}$
- $-\frac{3}{16}$

**Question 20 :** La limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) - (\sin(x))^2}{x^4}$  vaut

- $-\frac{1}{3}$
- $\frac{1}{3}$
- $\frac{1}{2}$
- 0



**Question 21 :** Soit la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

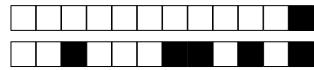
$$f(x) = \begin{cases} 3x - a & \text{si } x \leq \frac{\pi}{2} \\ bx^2 + \cos(x) & \text{si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  si

- $a = \frac{\pi}{3}$  et  $b = \frac{3}{\pi}$
- $a = \frac{3\pi}{4}$  et  $b = \frac{3}{\pi}$
- $a = \frac{\pi}{2}$  et  $b = \frac{4}{\pi}$
- $a = \frac{5\pi}{4}$  et  $b = \frac{4}{\pi}$

**Question 22 :** La limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x + \sqrt{3x + \sqrt{5x}}}}$

- vaut 0
- vaut  $\frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{5}}}}$
- vaut  $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- n'existe pas

**Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux**

Pour chaque question, mettre une croix (sans faire de ratures) dans la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

**Question 23 :** L'intégrale  $\int_{-a}^a \sin(\operatorname{tg}(x)) dx$  est nulle pour tout  $a \in [-1, 1]$ .

VRAI       FAUX

**Question 24 :** Soit la suite de nombres réels  $(x_n)$  définie récursivement par

$$x_0 = 0 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \frac{4}{5 - x_n}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors  $x_n \leq 4$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

VRAI       FAUX

**Question 25 :** Si une fonction  $f: ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est telle que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ , alors la série numérique  $\sum_{n=1}^{+\infty} f\left(\frac{1}{n^2}\right)$  converge.

VRAI       FAUX

**Question 26 :** Soit deux sous-ensembles bornés non vides  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{R}$  tels que  $A \subset B$  et  $A \neq B$ . Alors  $\operatorname{Sup} A < \operatorname{Sup} B$ .

VRAI       FAUX

**Question 27 :** Si  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  est une série numérique convergente et  $(b_n)$  est une suite bornée de nombres réels, alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$  est une série numérique convergente.

VRAI       FAUX



**Question 28 :** Soit deux suites bornées de nombres réels  $(x_n)$  et  $(y_n)$  telles que  $x_n \leq y_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} y_n$ .

VRAI       FAUX

**Question 29 :** Soit la fonction  $f: ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \log(\cos(x))$ .

Alors  $f$  admet un maximum local en  $x = 0$ .

VRAI       FAUX

**Question 30 :** Soit deux suites de nombres réels  $(x_n)$  et  $(y_n)$  telles que les propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i)  $x_n \leq y_n$  pour tout  $n$  pair,
- (ii)  $x_n \geq y_n$  pour tout  $n$  impair.

Si la suite  $(x_n)$  converge, alors la suite  $(y_n)$  converge aussi.

VRAI       FAUX

**Question 31 :** Soit  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[0, 3]$  et dérivable en tout point de l'intervalle  $]0, 3[$ , telle que  $g(0) = -4$  et  $g(3) = 2$ . Alors il existe  $c \in ]0, 3[$  tel que  $g'(c) = 2$ .

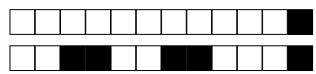
VRAI       FAUX

**Question 32 :** Soit la fonction bijective  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = 7 - 10x - \sin(x) - \sin(4x)$$

et sa fonction réciproque  $g = f^{-1}$ , qui est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Alors  $g'(7) = -\frac{1}{15}$ .

VRAI       FAUX



+1/12/49+