Enseignante : A. Lachowska - Analyse I - (n/a)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

16 janvier 2017 - durée : 3 heures

n/a

n/a

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

  +3 points si la réponse est correcte,
  0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
  −1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

  +1 point si la réponse est correcte,
  0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
  −1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Respectez les consignes suivantes pour **marquer vos réponses** :

oui | ja | sì | yes

non | nein | non | no

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question mettre une croix dans la case correspondant à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit la suite de nombres réels (a_n) définie récursivement par

$$a_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad a_{n+1} = 2a_n + 1\,, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors

- ☐ $a_n = 2n + 1\,,\quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- ☐ $a_n = 2^{n+1} - 1\,,\quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- ☐ $a_n = (n+1)^2 - n\,,\quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- ☐ $a_n = 1 + \frac{1}{3}n(n^2+5)\,,\quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Question 2 : La limite $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\,e^{x}} - \frac{1}{x\,e^{2x}}\right)$ vaut

- ☐ $-\infty$
- ☐ 1
- ☐ $+\infty$
- ☐ 0

Question 3 : L'ensemble des nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^4 - \bar{z} = 0$ contient

- ☐ exactement 2 éléments
- ☐ un nombre infini d'éléments
- ☐ exactement 6 éléments
- ☐ exactement 4 éléments

Question 4 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ et la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \cos\left(\frac{\pi\,x}{4}\right)$. Si $h = f \circ g$, alors

- ☐ $h'(1) = \dfrac{\sqrt{2}\,\pi}{2}$
- ☐ $h'(1) = -\dfrac{\pi}{4}$
- ☐ $h'(1) = \dfrac{\pi}{4}$
- ☐ $h'(1) = -\dfrac{\sqrt{2}\,\pi}{2}$

Question 5 : Soit la fonction $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 4(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}}.$$

Alors

- ☐ f est convexe sur l'intervalle $]-1, 2[$ et admet un point d'inflexion en $x = 8$
- ☐ f est convexe sur l'intervalle $]-1, 2[$ et atteint un maximum local en $x = 8$
- ☐ f est concave sur l'intervalle $]2, +\infty[$ et atteint un minimum local en $x = 8$
- ☐ f est concave sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ et atteint un maximum local en $x = 8$

Question 6 : Soit la série avec un paramètre $t \in \mathbb{R}$ définie par

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\cos(t\pi)\big)^n .$$

Alors

- ☐ la série converge pour tout $t \in \mathbb{R}$
- ☐ la série converge pour tout $t \notin \mathbb{Z}$
- ☐ la série diverge pour tout $t \in \mathbb{R}$
- ☐ la série converge seulement pour un nombre fini de valeurs de t

Question 7 : Soit la suite de nombres réels (a_n) définie récursivement par

$$a_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{3} + \frac{a_n^2}{3}, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors

- ☐ la suite converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{2}{3}$
- ☐ la suite converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$
- ☐ la suite converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
- ☐ la suite ne converge pas

Question 8 : L'intégrale $\displaystyle\int_5^7 \frac{8}{x^2 + 2x - 15}\, dx$ vaut

- ☐ $\log\left(\dfrac{5}{3}\right)$
- ☐ $\log\left(\dfrac{3}{5}\right)$
- ☐ $\log\left(\dfrac{13}{6}\right)$
- ☐ $8\log\left(\dfrac{13}{6}\right)$

Question 9 : Soit l'ensemble borné non vide $A = \left\{ x \in [0, 4\pi] : \cos(x) < \dfrac{1}{4} \right\}$ et $b = \operatorname{Sup} A$. Alors

- ☐ $\sin(b) = \frac{1}{4}$
- ☐ $\cos(b) < \frac{1}{4}$
- ☐ $b < 2\pi$
- ☐ $\cos(b) = \frac{1}{4}$

Question 10 : Soit la fonction $f\colon\ ]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\, x^n$

Alors

- ☐ $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$
- ☐ $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$
- ☐ f n'est pas dérivable en $x = \frac{1}{2}$
- ☐ $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$

Question 11 : L'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\, dx$ vaut

- ☐ $\dfrac{2}{\sqrt{e}}$
- ☐ $\dfrac{\sqrt{e}}{2}$
- ☐ $e - \dfrac{\sqrt{e}}{2}$
- ☐ $\sqrt{e}$

Question 12 : L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^2}\, dx$

- ☐ vaut $\dfrac{3}{e}$
- ☐ vaut $\dfrac{1}{e}$
- ☐ est divergente
- ☐ vaut $\dfrac{2}{e}$

Question 13 : La série numérique définie par $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

- [ ] diverge
- [ ] diverge, mais la série alternée $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ converge
- [ ] converge vers un nombre réel s tel que $s<3$
- [ ] converge vers un nombre réel s tel que $s\geq 3$

Question 14 : Soit la suite de nombres réels (a_n) définie par

$$a_n=\frac{\sqrt[4n]{5}-4}{\sqrt[5n]{4}-5}\,,\qquad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}.$$

Alors

- [ ] la suite converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n=\frac{3}{4}$
- [ ] la suite converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n=\frac{4}{5}$
- [ ] la suite converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n=\frac{5}{4}$
- [ ] la suite diverge

Question 15 : Soit $p\in\mathbb{R}$ un nombre quelconque.

- [ ] La série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^p}$ converge absolument pour tout $p>0$
- [ ] La série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^p}$ converge pour tout $p>0$
- [ ] La série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\log(n+2)}{(n+1)^p}$ diverge pour tout $p>0$
- [ ] La série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^p(n+2)^p}$ converge pour tout $p>0$

Question 16 : Soit la fonction $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=2x^3+3x^2$.
Alors l'image de l'intervalle $[-2,0]$ est

- [ ] $[-4,0]$
- [ ] $[-4,1[$
- [ ] $[-4,1]$
- [ ] $[-4,0]\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$

Question 17 : L'ensemble des nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^3 = 27\,\mathrm{i}$ est

- ☐ $\left\{3\,\mathrm{i}\,,\ \frac{3}{2}\big(1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}\big)\,,\ -\frac{3}{2}\big(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\big)\right\}$
- ☐ $\left\{-3\,\mathrm{i}\,,\ \frac{3}{2}\big(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\big)\,,\ -\frac{3}{2}\big(1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}\big)\right\}$
- ☐ $\left\{3\,\mathrm{i}\,,\ \frac{3}{2}\big(\sqrt{3}-\mathrm{i}\big)\,,\ -\frac{3}{2}\big(\sqrt{3}+\mathrm{i}\big)\right\}$
- ☐ $\left\{-3\,\mathrm{i}\,,\ \frac{3}{2}\big(\sqrt{3}+\mathrm{i}\big)\,,\ -\frac{3}{2}\big(\sqrt{3}-\mathrm{i}\big)\right\}$

Question 18 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{3x-\sin(x^2)}$ et le polynôme de Taylor d'ordre 2 de f autour de $x_0 = 0$,

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2\,, \quad \text{avec } a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Alors le coefficient a_2 vaut

- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ 8
- ☐ 4
- ☐ $\frac{7}{2}$

Question 19 : L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^3}{(1+x^4)^3}\,dx$ vaut

- ☐ $\frac{1}{4}$
- ☐ $\frac{3}{16}$
- ☐ $-\frac{1}{4}$
- ☐ $-\frac{3}{16}$

Question 20 : La limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - \big(\sin(x)\big)^2}{x^4}$ vaut

- ☐ $-\frac{1}{3}$
- ☐ $\frac{1}{3}$
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ 0

Question 21 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 3x - a & \text{si } x \leq \frac{\pi}{2} \\ bx^2 + \cos(x) & \text{si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ si

- ☐ $a = \dfrac{\pi}{3}$ et $b = \dfrac{3}{\pi}$
- ☐ $a = \dfrac{3\pi}{4}$ et $b = \dfrac{3}{\pi}$
- ☐ $a = \dfrac{\pi}{2}$ et $b = \dfrac{4}{\pi}$
- ☐ $a = \dfrac{5\pi}{4}$ et $b = \dfrac{4}{\pi}$

Question 22 : La limite $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x + \sqrt{3x + \sqrt{5x}}}}$

- ☐ vaut 0
- ☐ vaut $\dfrac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{5}}}}$
- ☐ vaut $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
- ☐ n'existe pas

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, mettre une croix (sans faire de ratures) dans la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 23 : L'intégrale $\displaystyle\int_{-a}^{a} \sin\big(\mathrm{tg}(x)\big)\,dx$ est nulle pour tout $a \in [-1, 1]$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Soit la suite de nombres réels (x_n) définie récursivement par

$$x_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad x_{n+1} = \frac{4}{5 - x_n}\,, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors $x_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Si une fonction $f\colon\ ]\,0, +\infty[\ \to \mathbb{R}$ est telle que $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0$, alors la série numérique $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Soit deux sous-ensembles bornés non vides A et B de $\mathbb{R}$ tels que $A \subset B$ et $A \neq B$. Alors $\operatorname{Sup} A < \operatorname{Sup} B$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27 : Si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est une série numérique convergente et (b_n) est une suite bornée de nombres réels, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ est une série numérique convergente.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 28 : Soit deux suites bornées de nombres réels (x_n) et (y_n) telles que $x_n \leq y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \sup x_n \leq \lim_{n\to+\infty} \sup y_n$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 29 : Soit la fonction $f\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \log\big(\cos(x)\big)$. Alors f admet un maximum local en $x = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 30 : Soit deux suites de nombres réels (x_n) et (y_n) telles que les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) $x_n \leq y_n$ pour tout n pair,

(ii) $x_n \geq y_n$ pour tout n impair.

Si la suite (x_n) converge, alors la suite (y_n) converge aussi.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 31 : Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0, 3]$ et dérivable en tout point de l'intervalle $]0, 3[$, telle que $g(0) = -4$ et $g(3) = 2$. Alors il existe $c \in \,]0, 3[$ tel que $g'(c) = 2$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 32 : Soit la fonction bijective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 7 - 10x - \sin(x) - \sin(4x)$$

et sa fonction réciproque $g = f^{-1}$, qui est dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors $g'(7) = -\dfrac{1}{15}$.

☐ VRAI ☐ FAUX