Analyse I — Série 9

EPFL – Sections SIE/GC/SC — 13.11.2024

Exercice 1.
Donner la définition avec $\varepsilon, \delta, ...$ et la caractérisation équivalente avec des suites de:

(a) $\lim\limits_{x \uparrow 4} f(x) = -\infty$ (b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Exercice 2.
Calculer le prolongement par continuité en $x = 0$ des fonctions suivantes:

(a) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ (b) $f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (c) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

Exercice 3.
Calculer les limites suivantes (si elles existent).

(a) $\lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}$

(b) $\lim\limits_{x \uparrow 0} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}$

(c) $\lim\limits_{x \uparrow 1} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}$

(d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x-6}{4-x^2}$

(e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+5x-6}{4-x}$

(f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$

(g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$

(h) $\lim\limits_{x \to \infty} x\left(\sqrt{(1+\frac{2}{x})(1+\frac{3}{x})} - 1\right)$

Exercice 4.
Étudier la continuité et la continuité à gauche/droite en $x = 3$ et $x = -1$ de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivante, en fonction des paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-2x-3} & \text{si } x > 3 \text{ ou } x < -1 \\ \alpha & \text{si } x = 3 \\ \beta x - 4 & \text{si } -1 \leq x < 3. \end{cases}$$

Exercice 5.
Montrer que:

(a) L'équation $\cos(x) = x\sin(x)$ a au moins une solution dans l'intervalle $[0, 2024]$.

(b) L'équation $\sin(x) + \frac{1}{x-4} = 0$ a au moins **deux** solutions dans l'intervalle $[0, \pi]$.

(c) L'équation $(x-2)\cos(x) = \sin(x)$ admet au moins **deux** solutions sur $\mathbb{R}$.

(d) Tout polynôme $p(x)$ de degré **impair** à coefficients réels possède au moins une racine (= un zéro) dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6. *(Théorème du point fixe)*
Soit $f\colon [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue (partant **et arrivant** vers $[a,b]$). Montrer que f possède un point fixe, i.e., qu'il existe $c \in [a,b]$ avec $f(c) = c$.

Exercice 7.
Vrai ou faux ?

(a) Si $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions telles que $f(q) = g(q)$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$, alors $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Si $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues telles que $f(q) = g(q)$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$, alors $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(c) Toute fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en au moins un $u \in \mathbb{R}$.

(d) Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est telle que f^2 est continue, alors f est continue.

(e) Toute fonction continue $f\colon\ [0,1[\ \to \mathbb{R}$ atteint soit son minimum, soit son maximum (soit les deux) sur $[0,1[$.

Exercice 8.
Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, avec $I = [0,1]$. Alors l'image $\mathrm{Im}(f)$ de f:

- ☐ est toujours un intervalle ouvert.
- ☐ est toujours un intervalle fermé.
- ☐ est toujours un intervalle, mais qui peut être ni ouvert, ni fermé.
- ☐ n'est pas nécessairement un intervalle.

Exercice 9.
Même question qu'à l'exercice 8, mais avec $I =]0,1[$.