Analyse I — Série 6

EPFL – Sections SIE/GC/SC — 16.10.2024

Exercice 1.
Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, montrer que $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ pour toute sous-suite $(a_{n_k})_k$ de $(a_n)_n$. En déduire les valeurs de $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$.

Exercice 2.
Vrai ou Faux ?

(a) Si $|a_{n+1}| < |a_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\big(|a_n|\big)$ converge.

(b) Si $|a_{n+1}| < |a_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors (a_n) est bornée.

(c) Si $|a_{n+1}| < |a_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors (a_n) converge.

(d) Si $|a_{n+1}| < |a_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\left(\frac{1}{a_n^2}\right)$ converge.

(e) Si $|a_{n+1}| < |a_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$.

(f) Toute suite de Cauchy est bornée.

(g) Si $|a_{n+1} - a_n| \leq 10^{-n}$ pour tout n, alors (a_n) est de Cauchy.

(h) Si $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+k} - a_n| = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé, alors (a_n) est de Cauchy.

Exercice 3.
Pour les suites $(a_n)_n$ suivantes, trouver une sous-suite $(a_{n_k})_k$ convergeant vers la valeur donnée.

(a) $a_n = \cos(\frac{\pi}{2}(n^3-1))$, $a_{n_k} \longrightarrow 0$

(b) $a_n = \cos(\frac{\pi}{2}(n^3-1))$, $a_{n_k} \longrightarrow -1$

(c) $a_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, $a_{n_k} \longrightarrow 0$

(d) $a_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, $a_{n_k} \longrightarrow \frac{1}{2}$

Exercice 4.
Montrer que pour $q \in \mathbb{R}$, la série géométrique $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$

(a) converge et vaut $\frac{1}{1-q}$ si $|q| < 1$,

(b) diverge si $|q| \geq 1$.

Exercice 5.
Montrer que pour $p \in \mathbb{R}$, la série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$

(a) converge si $p > 1$,

(b) diverge si $p \leq 1$.

Exercice 6.
Étudier la convergence des séries suivantes.

(a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2^k}$

(b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3k+2}{4k+5}\right)^k$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+7}-n)$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+4)(n-3)}{7n^3+n+2}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n}}{n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{n-1}{n^2}\right)$

Exercice 7.

(a) Déterminer directement la valeur de la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ en calculant la limite de la suite des sommes partielles.

(b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge et que sa valeur est $\in [1,2]$.

Exercice 8.

Calculer les valeurs des séries suivantes.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k-1}}\right)$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)}$