Analyse I — Série 12

EPFL – Sections SIE/GC/SC — 4.12.2024

Exercice 1.
Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a,b[$. Vrai ou faux ?

(a) Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in\,]a,b[$, alors f est croissante sur $[a,b]$.

(b) Si f est croissante sur $[a,b]$, alors $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in\,]a,b[$.

(c) Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in\,]a,b[$, alors f est strictement croissante sur $[a,b]$.

(d) Si f est strictement croissante sur $[a,b]$, alors $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a,b[$.

(e) Si la tangente au point $(c, f(c))$ avec $c \in\,]a,b[$ est horizontale, alors f admet un extremum en c.

Exercice 2.
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Vrai ou faux ?

(a) Si f est paire, alors f' est paire.

(b) Si f est paire, alors f' est impaire.

(c) Si f est impaire, alors f' est paire.

(d) Si f est impaire, alors f' est impaire.

(e) Si f est périodique, alors f' est périodique.

(f) Si f' est périodique, alors f est périodique.

Exercice 3.
Déterminer (i) la série de Taylor de $f(x)$ centrée en a, (ii) son rayon *et son domaine* de convergence et (iii) le développement limité de $f(x)$ en a d'ordre $n \in \mathbb{N}$, dans les cas suivants:

(a) $f(x) = \dfrac{2}{3+4x}$ en $a = 0$.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ en $a = 2$.

(c) $f(x) = e^{-x}$ en $a = 0$.

(d) $f(x) = \sinh(x)$ en $a = 0$.

(e) $f(x) = \cosh(x)$ en $a = 0$.

(f) $f(x) = \sin(x)$ en $a = \pi$.

(g) $f(x) = \cos(x)$ en $a = \frac{\pi}{2}$.

(h) $f(x) = e^x$ en $a = 1$.

(i) $f(x) = \log(x)$ en $a = 1$.

(j) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $a = 1$.

(k) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ en $a = 0$.

Exercice 4.
Calculer les limites suivantes (en utilisant un développement limité !)

(a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} - \sin(x)}{x^5}$

(b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x}{x - \log(1+x)}$

(c) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x\sin(\sin(x)) - \sin(x)^2}{x^6}$

(d) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x + \log(e^x - 2x)}{x^3}$

Exercice 5.
Trouver les trois premiers termes (non-nuls !) de la série de MacLaurin des fonctions suivantes.

(a) $f(x) = \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ (b) $f(x) = \tan(x)$ (c) $f(x) = \arctan(x)$

Exercice 6.
Montrer que $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7.
Calculer les primitives ci-dessous, à l'aide de primitives déjà connues.

(a) $\int \frac{3x+4}{1+x^2}\, dx$ (c) $\int \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}}\, dx$ (e) $\int \frac{1}{x \log x}\, dx$

(b) $\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)^3}\, dx$ (d) $\int \frac{\sinh(x)}{e^x+1}\, dx$

Exercice 8. ***(Difficile.)***
Démontrer que toute fonction croissante $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable (au sens de Riemann).