Solution 1. On veut montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{j=1}^{n+1} j\, 2^j = n\, 2^{n+2} + 2.$$

On commence par la première étape: montrer que l'égalité est vraie quand $n = 0$. On a bien

$$\sum_{j=1}^{1} j2^j = 1 \cdot 2^1 = 0 + 2.$$

On passe ensuite au pas de récurrence:

Supposons que $\sum_{j=1}^{n+1} j2^j = n2^{n+2} + 2$ est vrai pour n, et montrons le pour $n+1$ (c'est-à-dire qu'on veut montrer que $\sum_{j=1}^{n+2} j2^j = (n+1)2^{n+3} + 2$).

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n+2} j2^j &= \sum_{j=1}^{n+1} j2^j + (n+2)2^{n+2} \\
&= n2^{n+2} + 2 + n2^{n+2} + 2 \cdot 2^{n+2} \\
&= 2^{n+2}(n + n + 2) + 2 \\
&= (2n+2)2^{n+2} + 2 \\
&= (n+1)2^{n+3} + 2,
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait démontrer.

(Explications plus détaillées des étapes de calculs: On écrit d'abord la partie gauche de l'égalité avec $n+1$. On la décompose en deux parties, la somme qu'on connait grâce à l'hypothèse, $\sum_{j=1}^{n+2} j2^j$, et le dernier terme, $(n+2)2^{n+2}$, qu'on obtient en remplaçant j par $n+2$. On utilise l'hypothèse de récurrence, $\sum_{j=1}^{n+1} j\, 2^j = n\, 2^{n+2} + 2$, puis on réorganise ensuite les termes pour obtenir $(n+1)2^{n+3} + 2$.)

Solution 2. On cherche un exemple de suite $(a_n)_{n\geq 0}$ positive et non bornée qui ne tend pas vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$.

Rappelons d'abord les définitions: Une suite est bornée si il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq a_n \leq M$. Notons que comme $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut poser $m = 0$ et a_n est forcément minorée par m.

Une suite tend vers ∞ si pour tout $M' \in \mathbb{R}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $a_n > M'$.

Ainsi, comme on cherche une suite (a_n) positive, non-bornée et qui ne tend pas à l'infinie, on veut les propriétés suivantes pour a_n:

(a) $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
(b) si pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $a_n > M$
(c) il existe $M' \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$ il existe $n \geq n_0$ tel que $a_n < M'$.

Toute suite dont les termes alternent en une sous-suite qui tend vers l'infini et une sous-suite bornée fait l'affaire. Par exemple, la suite

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ n & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

(a) la suite (a_n) est positive, car $a_n \geq 0$ pour tout n.
(b) la suite (a_n) est non-bornée. Pour tout $M \in \mathbb{R}^*$, on pose $n = 2\lfloor |M| \rfloor$. Comme n est pair, on a $a_n = 2\lfloor |M| \rfloor > M$. Si $M = 0$, on peut juste prendre $n = 2$.
(c) La suite (a_n) ne tend pas vers ∞. En effet, posons $M = 10$, et soit $n_0 \geq 0$. On cherche $n \geq N$ tel que $a_n \leq 10$. Prenons $n = 2n_0 + 1$. Alors n est impair et $n > n_0$, et on a $a_n = 1 < 10$.