Question 1:

Soit $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, définie par $f(x) := x\,e^{-x/5}$. Montrer qu'il existe $x_* > 0$ tel que $f(x_*) = 1$. On donnera une justification complète. Si des résultats du cours sont utilisés, on les énoncera.

Solution : *Soit* $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, *définie par* $f(x) := x\,e^{-x/5}$. *Montrons qu'il existe* $x_* > 0$ *tel que* $f(x_*) = 1$.
Rappelons d'abord le théorème de la valeur intermédiaire:
Theorème: *Soient* $a < b$ *et* $f \in C^0([a,b])$. *Alors pour tout* y *compris entre* $f(a)$ *et* $f(b)$, *il existe* $x \in [a,b]$ *tel que* $f(x) = y$.

Pour montrer l'existence de x_*, *on va vérifier que* f *satisfait les conditions du théorème avec deux valeurs* a *et* b *telles que* $f(a) < 1 < f(b)$. *La fonction* f *vaut* 0 *en* 0 *et* $f(5) = 5e^{-1} > 1$ *en* 5. *De plus,* $f \in C^0([a,b])$. *Posons* $a = 0$, $b = 5$ *et* $y = 1 \in [0,5]$. *On a bien* $f(0) < 1 < f(5)$. *On peut donc appliquer le théorème pour montrer qu'il existe* $x_* \in [0,5]$ *tel que* $f(x_*) = 1$. *De plus,* $x_* \neq 0$ *car* $f(0) = 0$, *donc* $x_* \neq 0$. *On a donc bien trouvé une valeur* $x_* > 0$ *telle que* $f(x_*) = 1$.

Question 2:

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$.

(a) Montrez, en utilisant un ou des résultats du cours, que l'équation $f''(x) = 0$ a au moins deux solutions sur $]0,1[$.

(b) Donnez un exemple explicite d'une fonction f satisfaisant les propriétés ci-dessus où l'équation $f''(x) = 0$ a exactement deux solutions sur $]0,1[$.

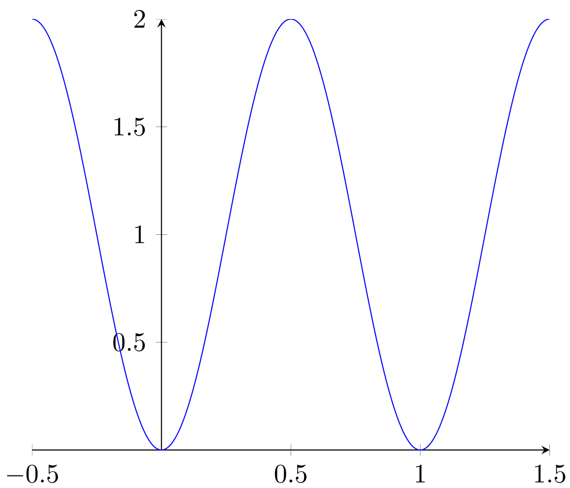
Solution : *Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$.*

(a) Montrons que l'équation $f''(x) = 0$ a au moins deux solutions sur $]0,1[$. Rappelons d'abord le théorème de Rolle:
Theorème: *Soient $a < b$, f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe un $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Comme f est $\mathcal{C}^\infty$ et puisque $f(0) = f(1) = 0$, on peut appliquer le théorème de Rolle pour montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f(c) = 0$. On applique à nouveau le théorème de Rolle à la fonction f' (qui est aussi $\mathcal{C}^\infty$) sur les deux tronçons $[0,c]$ et $[c,1]$. Puisque $f'(0) = f'(c) = 0$, il existe $a \in]0,c[$ tel que $f''(a) = 0$. De même, comme $f'(c) = f'(1) = 0$, il existe $b \in]c,1[$ tel que $f''(b) = 0$. Comme $a < c < b$, on a bien trouvé $a \neq b$ sur $]0,1[$ avec $f''(a) = f''(b) = 0$.

(b) Pour donner un exemple explicite d'une fonction f satisfaisant les propriétés ci-dessus et où l'équation $f''(x) = 0$ a exactement deux solutions sur $]0,1[$, on cherche une fonction qui a deux minimums locaux (respectivement maximum locaux) en 0 et 1 et un maximum local (respectivement minimum local) entre les deux.

Par exemple, la fonction $f(x) = \sin(2\pi x - \frac{\pi}{2}) + 1$ satisfait ces conditions.



La deuxième dérivée de $\sin(2\pi x - \frac{\pi}{2}) + 1$ est $4\cos(2\pi x)$, qui vaut 0 lorsque $x = \frac{n}{2} - \frac{1}{4}, n \in \mathbb{Z}$. Sur $[0,1]$, on a exactement deux zéros, $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$.

Question 2:

(a) Calculer le développement limité d'ordre 2 de $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ autour de $x_0 = 1$.

(b) Déterminer si la série

$$\sum_{n\geq 1}\left\{\arctan\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n}\right\}$$

converge ou diverge, en justifiant rigoureusement votre réponse.

Solution :

(a) Calculons le développement limité d'ordre 2 de $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ autour de $x_0 = 1$. Calculons d'abord ses dérivées première et deuxième:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2+1}$$
$$f''(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

Rappelons que le développement limité d'ordre 2 de f en x_0 est

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o(|x-x_0|^n).$$

Cela implique également que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + O(|x-x_0|^n).$$

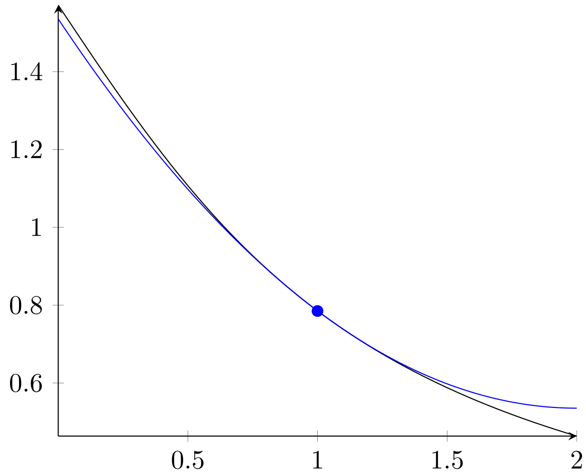
Autrement dit, on peut écrire

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R(x),$$

où R est une fonction définie dans un voisinage de $x_0 = 1$ et il existe deux constantes $\delta > 0$ et $C > 0$ telles que $R(x) \leq C(x-x_0)^2$ pour tout x tel que $|x-x_0| < \delta$ (on utilisera cela au point 2).
Calculons ce développement limité pour $fx) = \arctan(\frac{1}{x})$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{2}\frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k + R(x) \\ &= \arctan(1) - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 + R(x) \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 + R(x), \end{aligned}$$

où $R(x) = O(|(x-1)^2|)$.
Dans le graphique ci-dessous, on peut voir f en noir et le polynôme de Taylor de degré 2 en 1, $\arctan(1) - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2$*, en bleu.*



(b) Pour déterminer si la série

$$\sum_{n\geq 1} \left\{ \arctan\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n} \right\}$$

converge ou diverge, on va calculer $\arctan(\frac{1}{1+\frac{1}{n}})$ *et observer son comportement quand* $n \to \infty$. *Remplaçons* x *par* $1 + \frac{1}{n}$ *au point 1.*

$$\arctan(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2n}(x-1) + \frac{1}{4n^2} + R(1+\frac{1}{n}).$$

Ecrivons donc le terme de la somme comme

$$\begin{aligned} \arctan(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n} &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2n}(x-1) + \frac{1}{4n^2} + R(1+\frac{1}{n}) \\ &= \frac{1}{4n^2} + R(1+\frac{1}{n}). \end{aligned}$$

Par le point 1, il existe $\delta > 0$ *et* $C > 0$ *tels que* $R(x) \leq C(x-1)^2$ *pour tout* x *tel que* $|x - x_0| < \delta$. *Ainsi, si* $n \geq \frac{1}{\delta}$, $|1 + \frac{1}{n} - 1| \leq \delta$, *et donc* $R(1+\frac{1}{n}) \leq C\frac{1}{n^2}$. *Le terme de la somme est donc borné quand* $n \geq \frac{1}{\delta}$*:*

$$\arctan(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{4n^2} + C\frac{1}{n^2} = C'\frac{1}{n^2}.$$

Comme la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *converge, par le critère de comparaison, on déduit que*

$$\sum_{n\geq 1} \arctan(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n}$$

converge aussi.