Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir essayé *plusieurs heures*[1] de le résoudre est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

1. (même parfois plusieurs jours)

Solution 1.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $a_n \to a$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, on a $|a_n - a| \leq \varepsilon$. Comme n_k est strictement croissante et à valeurs dans $\mathbb{N}$, $n_k \geq N$ dès que $k \geq N$. Ainsi, pour tout $k \geq N$, on a $|a_{n_k} - a| \leq \varepsilon$ (car $n_k \geq N$), donc comme ε était arbitraire, on a $a_{n_k} \to a$.

La première limite vaut e (sous-suite de $(1+\frac{1}{n})^n$) et la seconde $\sqrt{e}$ (sous-suite de $((1+\frac{1}{n})^n)^{1/2}$).

Solution 2.
(a) Vrai. La suite $|a_n|$ est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge.

(b) Vrai. La suite $|a_n|$ converge, elle est donc bornée, d'où $||a_n|| \leq M \Leftrightarrow |a_n| \leq M$, et (a_n) est donc bornée.

(c) Faux. On peut prendre $a_n = (-1)^n(1+\frac{1}{n})$.

(d) Faux. Prendre $a_n = \frac{1}{n}$.

(e) Faux. Prendre $a_n = \frac{1}{n}$.

(f) Vrai, car elle converge.

(g) Vrai. Si $m > n$, on a

$$\begin{aligned}|a_m - a_n| &\leq \sum_{k=n}^{m-1} |a_{k+1} - a_k| \leq \sum_{k=n}^{m-1} 10^{-k} = 10^{-n} \sum_{k=0}^{m-n-1} 10^{-k} = 10^{-n} \frac{1 - \frac{1}{10^{m-n}}}{1 - \frac{1}{10}} \\ &\leq 10^{-n} \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9} \cdot 10^{-n}.\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\frac{10}{9} \cdot 10^{-n} \to 0$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, on a $\frac{10}{9} \cdot 10^{-n} \leq \varepsilon$. Alors pour $m, n \geq N$, on a $|a_m - a_n| \leq \frac{10}{9} \cdot 10^{-n} \leq \varepsilon$, et (a_n) est de Cauchy.

(h) Faux. Prendre $a_n = \sqrt{n}$. Alors $a_{n+k} - a_n = \frac{n+k-n}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n}}$ converge vers 0 pour tout k, mais (a_n) diverge.

Solution 3.
(a) Si n est un nombre pair, $n^3 - 1$ est un nombre impair, et donc $\cos(\frac{\pi}{2}(n^3-1)) = \cos(\frac{\pi}{2}(\text{impair})) = 0$. Ainsi, pour $n_k = 2k$, la sous-suite (a_{2k}) est constante $= 0$ et converge donc vers 0.

(b) Si n est de la forme $4k-1$ (i.e. si $n \equiv -1 \pmod 4$), on vérifie que $n^3 - 1$ est de la forme $4m+2$ (i.e. $n^3 - 1 \equiv 2 \pmod 4$). Donc pour $n_k = 4k-1$, on a $\cos(\frac{\pi}{2}(n^3-1)) = \cos(\frac{\pi}{2}(4m+2)) = \cos(2\pi m + \pi) = -1 \longrightarrow -1$. La sous-suite (a_{4k-1}) converge donc vers -1.

(c) Pour $n_k = k^2$, on a $a_{n_k} = \sqrt{k^2} - \lfloor \sqrt{k^2} \rfloor = k - k = 0 \longrightarrow 0$.

(d) <u>Détermination des n_k:</u> On cherche des indices n tels que $\sqrt{n} \approx k + \frac{1}{2}$, de sorte que $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = k$ et $\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \approx \frac{1}{2}$. On prend le carré de l'équation $\sqrt{n} = k + \frac{1}{2}$ pour trouver

$$n = (k + \frac{1}{2})^2 = k^2 + k + \frac{1}{4} \approx k^2 + k.$$

On pose donc $n_k = k^2 + k$.

<u>Calcul de la limite pour $n_k = k^2 + k$:</u> On remarque que $k^2 \leq k^2 + k < (k+1)^2$ pour tous $k \geq 0$. En prenant la racine, on trouve

$$k \leq \sqrt{k^2 + k} = \sqrt{n_k} < k + 1 \quad \Rightarrow \quad \lfloor \sqrt{n_k} \rfloor = k.$$

Ainsi, on calcule

$$a_{n_k} = \sqrt{n_k} - \lfloor \sqrt{n_k} \rfloor = \sqrt{k^2 + k} - k = \frac{k}{\sqrt{k^2 + k} + k} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{k}} + 1} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Solution 4.

(a) Les sommes partielles sont

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \longrightarrow \frac{1}{1 - q}$$

car $|q| < 1$, d'où $|q|^{n+1} \to 0$ (suite géométrique de raison < 1) et ainsi $q^{n+1} \to 0$. Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{1 - q}$.

(b) Si $|q| \geq 1$, le terme général q^n ne tend pas vers zéro, donc la série diverge.

Solution 5.

(a) Si $p > 1$, on utilise la même astuce que pour le cas $p = 2$ (vu en cours). Si S_n dénote la n-ième somme partielle, alors (S_n) est croissante (car $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^p} \geq S_n$). De plus, en séparant les termes pairs et impairs, on a

$$\begin{aligned} S_n \leq S_{2n+1} &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \cdots + \frac{1}{(2n)^p} + \frac{1}{(2n+1)^p} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^p} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)^p} \leq 1 + 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^p} = 1 + 2^{1-p} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \\ &\leq 1 + 2^{1-p} S_n. \end{aligned}$$

d'où $(1 - 2^{1-p}) S_n \leq 1$. Comme $p > 1$, on a $2^{1-p} < 1$ et le facteur $(1 - 2^{1-p})$ est positif. On trouve donc l'inéquation $S_n \leq \frac{1}{1 - 2^{1-p}}$, et (S_n) est majorée. Elle converge donc par croissance majorée, et la série aussi.

(b) Si $p \leq 1$, la série diverge par comparaison: on a $k^p \leq k$ et donc $\frac{1}{k^p} \geq \frac{1}{k}$. Ainsi $a_k \geq \frac{1}{k}$ et la série diverge car $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge (série harmonique).

Solution 6.

(a) La série converge par comparaison. En effet, $0 \leq \dfrac{1}{k+2^k} \leq \dfrac{1}{2^k}$, donc la série converge car $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ converge (série géométrique avec $|q| = \frac{1}{2} < 1$).

(b) La série converge par le critère de Cauchy:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{4n+5} = \frac{3}{4} < 1.$$

(c) La série converge par le critère de d'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4 3^n}{3^{n+1} n^4} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{n^4} = \frac{1}{3} < 1.$$

(d) La série converge par le critère de Leibniz (séries alternées). En effet, a_n est alternée et $|a_n|$ est décroissante (dès que $n \geq 2$), et on vérifie facilement que $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, donc on a aussi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(e) La série diverge. En effet, si elle convergeait (et valait, disons a), alors la série harmonique

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = a + \frac{\pi^2}{6}$$

convergerait aussi. (Pourquoi a-t-on le droit de séparer les sommes infinies en deux ?)

(f) Le terme général vaut $a_n = \frac{1}{n^2}$, donc la série converge (et vaut $\frac{\pi^2}{6}$).

(g) Si a_n dénote le terme général, on a l'estimation suivante dès que $n \geq 2$:

$$a_n = \sqrt{n^2+7} - n = \frac{7}{\sqrt{n^2+7}+n} \geq \frac{7}{\sqrt{(n+7)^2}+n} = \frac{7}{2n+7} \geq \frac{7}{7n} = \frac{1}{n}.$$

Donc la série diverge par comparaison, car $a_n \geq \dfrac{1}{n}$ (pour $n \geq 2$) et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

(h) La série converge par le critère de Cauchy:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \tfrac{2}{n}\right)^n = e^{-2} < 1.$$

(i) Cette série diverge car son terme général a_n ne tend pas vers 0:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+4)(n-3)}{7n^3+n+2} = \frac{1}{7} \neq 0$$

(j) La série converge par comparaison. On a

$$a_n = \frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n}}{n} = \frac{4}{n(\sqrt{n+4}+\sqrt{n})} \leq \frac{2}{n^{3/2}}.$$

Donc la série converge, car $0 \leq a_n \leq \frac{2}{n^{3/2}}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{3/2}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (série de terme $\frac{1}{n^p}$ avec $p = \frac{3}{2} > 1$).

Solution 7.

(a) On peut soit utiliser l'exercice 3(c) de la série 4, pour trouver:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

Ou alors, on réécrit le terme a_k comme:

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Les sommes partielles sont donc

$$S_n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-1} \pm \cdots + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{n+1} + 1.$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$ et la série vaut 1.

(b) On remarque que, si $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$, on a dès que $k \geq 2$,

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{(k-1)k} = a_{k-1}.$$

Ainsi, en prenant les sommes partielles

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} a_{k-1} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k,$$

et donc dans la limite lorsque $n \to \infty$:

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 2.$$

Solution 8.

(a) C'est une série géométrique avec $q = e^{-1}$. Sa valeur est donc $\frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{e}{e-1}$.

(b) Les sommes partielles sont

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n-2}} \pm \cdots - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{n}} - 1.$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -1$ et la série vaut -1.

(c) Le terme a_k s'écrit

$$a_k = \frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right)$$

Donc comme au (b), tous les termes dans les sommes partielles se compensent, sauf les 3 premiers et les 3 derniers:

$$S_n = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} + \quad 0 \quad + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right)$$

et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{11}{18}.$