Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir essayé *plusieurs heures*[1] de le résoudre est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

1. (même parfois plusieurs jours)

Solution 1.
On montre le cas du sup (le cas du inf est similaire). Supposons que $x = \sup A$. Alors x est le plus petit majorant, il existe donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un élément $a_n \in A$ tel que $x - \frac{1}{n} < a_n \leq x$. Par le théorème des deux gendarmes, la suite (a_n) converge vers x.

A l'inverse, supposons que x est un majorant et $(a_n) \subseteq A$ une suite qui converge vers x. Il faut montrer que x est le plus petit majorant. Soit donc $y < x$, et posons $\varepsilon = \frac{x-y}{100}$. Comme $a_n \to x$, on a $|a_n - a| \leq \varepsilon$ pour n assez grand (disons $n \geq N$). D'où $a_n \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$, et ainsi $y < a_n$ par choix de ε. Donc y n'est pas un majorant, et x est bien le sup.

Pour l'exercice 3, série 2: Au (d), on a $\sup A = \max A = 1$, puisque $1 \in A$; de plus, 0 est un minorant et la suite $a_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0: c'est donc $\inf A$. Pour le (e) et le (f), on trouve les min et max directement. Pour le (g), on trouve $\min A = 0$ et la suite écrite converge vers 1 qui est un majorant, c'est donc le sup. Et pour le (i), on trouve une suite de rationnels du type $1, 1.4, 1.41, 1.414, \ldots$ qui converge vers $\sqrt{2}$ par en dessous. Cela montre que $\sup A = \sqrt{2}$, et en prenant $(-1)\cdot$ cette suite, on montre que $\inf A = -\sqrt{2}$.

Solution 2.
Soit $\varepsilon > 0$. Si $a = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \leq \varepsilon^2$ pour tout $n \geq N$. En prenant les racines, on trouve $0 \leq \sqrt{a_n} \leq \varepsilon$. Si $a > 0$, on a

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| \frac{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}}.$$

Comme $a_n \to a$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n - a| \leq \varepsilon\sqrt{a}$ pour tout $n \geq N$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, on a $|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| \leq \dfrac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \varepsilon$.

Dans les deux cas, comme ε est arbitraire, on conclut que $\sqrt{a_n} \longrightarrow \sqrt{a}$.

Solution 3.

(a) On a $n^2 \leq n^2 + 2 \leq n^2 + 2n + 4 = (n+2)^2$. En prenant les racines, on trouve $n \leq \sqrt{n^2 + 2} \leq n + 2$, et donc

$$\frac{n}{2n} \leq \frac{\sqrt{n^2+2}}{2n} \leq \frac{n+2}{2n}.$$

Les suites à gauche et à droite convergent vers $\frac{1}{2}$, donc celle du milieu aussi grâce au théorème des deux gendarmes.

(b) La suite $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ converge vers 0 par le critère de d'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Un autre manière est d'estimer 2^n. Le plus rapide est d'utiliser l'exercice 3c de la série 4: $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$. Donc pour $n \geq 3$, on trouve $2^n \geq \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. Ainsi

$$0 \leq \frac{n^2}{2^n} \leq 6\frac{n^2}{n(n-1)(n-2)}.$$

Les suites à gauche et à droite convergent vers 0, donc celle du milieu aussi grâce au théorème des deux gendarmes.

(c) On a

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{n \cdot n \cdot n \cdots n} \leq \frac{1}{n} \cdot 1 = \frac{1}{n},$$

d'où $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$ par le théorème des deux gendarmes.

(d) On multiplie par $\frac{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+3}}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+3}}$ pour trouver

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+3}} = 0$$

car le dénominateur tend vers $+\infty$.

(e) On multiplie par $\frac{\sqrt{n^2-1}+(n-1)}{\sqrt{n^2-1}+(n-1)}$ pour trouver

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1-(n-1)^2}{\sqrt{n^2-1}+n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(2-\frac{2}{n})}{n\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1-\frac{1}{n}\right)} = \frac{(2-0)}{(\sqrt{1-0}+1-0)} = 1.$$

(f) On multiplie par $\frac{\sqrt{n^4+6n-3}+n^2}{\sqrt{n^4+6n-3}+n^2}$ pour trouver que la limite vaut

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(6n-3)}{\sqrt{n^4+6n-3}+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(6-\frac{3}{n})}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{6}{n^3}-\frac{3}{n^4}}+1\right)} = \frac{6}{1+1} = 3.$$

(g) La suite $a_n = n^2 3^n 2^{-3n} = n^2\left(\frac{3}{8}\right)^n$ converge vers 0 par le critère de d'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{3}{8} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \frac{3}{8} = \frac{3}{8} < 1.$$

(h) La suite est majorée par $\frac{3n+8}{n^2+2n+6}$ et minorée par $-\frac{3n+8}{n^2+2n+6}$. Ces deux suites convergeant vers 0, on conclut par le théorème des deux gendarmes que la suite originale aussi.

(i) La suite est majorée par $\frac{1}{2n+1}$ et minorée par $-\frac{1}{2n+1}$. Ces deux suites convergeant vers 0, on conclut par le théorème des deux gendarmes que la suite originale aussi.

(j) Soit $\varepsilon > 0$, et considérons la suite $b_n = \dfrac{n}{(1+\varepsilon)^n}$. On a

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\frac{1}{1+\varepsilon} = \frac{1}{1+\varepsilon} < 1.$$

Par le critère de d'Alembert, (b_n) converge vers 0, d'où $b_n \leq 1 \Leftrightarrow n \leq (1+\varepsilon)^n$ pour n assez grand, disons $n \geq N$. Ainsi, pour $n \geq N$, on a $1 \leq n \leq (1+\varepsilon)^n$. En prenant des racines n-ièmes, on trouve que pour $n \geq N$, on a $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1+\varepsilon$, d'où $|\sqrt[n]{n} - 1| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$. Comme ε est arbitraire, cela montre que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Solution 4.

(a) On écrit $1 + \dfrac{2}{n} = \dfrac{n+2}{n} = \dfrac{n+1}{n}\dfrac{n+2}{n+1} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)$, d'où

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n+1}} = e \cdot e \cdot 1 = e^2.$$

(b) On écrit $1 - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-1}{n} = \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{-1} = \left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{-1}$, d'où

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n\right)^{-1}\\ &= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} = \frac{1}{e\cdot 1} = \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

(c) On écrit $1 - \dfrac{1}{n^2} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$, d'où

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e \cdot \frac{1}{e} = 1.$$

Solution 5.

(a) La suite converge vers 0, donc $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) On calcule quelques valeurs de la suite: $(a_n) = (1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots)$. Ainsi, $\{a_{\geq n}\} = \{1, -\frac{1}{2}\} \Rightarrow \sup\{a_{\geq n}\} = 1$ et $\inf\{a_{\geq n}\} = -\frac{1}{2}$ d'où $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\dfrac{1}{2}$ et $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

(c) Pour $n_k = 2k$, on a $a_{n_k} = \left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k} \longrightarrow e$ (car c'est une sous-suite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ qui converge vers e, cf cours). Pour $n_k = 2k+1$, on a $a_{n_k} = \left(1-\frac{1}{2k+1}\right)^{2k+1} \to \frac{1}{e}$ (car c'est une sous-suite de $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ qui converge vers $\frac{1}{e}$, cf exercice précédent). On se convainc que ces limites sont les plus grandes/les plus petites possibles (toute autre sous-suite est une sous-suite de ces sous-suites!). On trouve donc $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{e}$ et $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = e$.

(d) On remarque que $\cos(\pi n) = (-1)^n$ et $\cos(\frac{\pi n}{2})$ vaut $(-1)^m$ si $n = 2m$ est pair, et 0 si n est impair. Donc, a_n prend les valeurs suivantes:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
a_n	$\frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}$	$\frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$	$\frac{1}{\frac{1}{2}-1} = -2$	$\frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$	$\frac{2}{3}$	-2	-2	-2	$\frac{2}{3}$	-2	…

Il suit que $\{a_{\geq n}\} = \{-2, \frac{2}{3}\}$, et donc

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{a_{\geq n}\} = -2 \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_{\geq n}\} = \frac{2}{3}.$$

(e) Par définition de $\lfloor x \rfloor$, $0 \leq x - \lfloor x \rfloor \leq 1$, donc $0 \leq a_n \leq 1$. Pour $n_k = k^2$, on a $a_{n_k} = k - k = 0 \longrightarrow 0$, d'où $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{k\to\infty} a_{k^2} = 0$. Et pour $n_k = k^2 - 1$, on remarque que $\lfloor \sqrt{k^2-1} \rfloor = k - 1$, et donc $a_{n_k} = \sqrt{k^2-1} - (k-1)$. Cette suite converge vers 1 (cf exercice 3(e)), et donc $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{k\to\infty} a_{k^2-1} = 1$.

Solution 6.

(a) Vrai. On a $|a_n - 0| = ||a_n| - 0|$, et donc $|a_n - 0| \leq \varepsilon$ si et seulement si $||a_n| - 0| \leq \varepsilon$. En contemplant la définition de "converger vers 0", on conclut que $a_n \to 0$ si et seulement si $|a_n| \to 0$.

(b) Faux. Prendre $a_n = 1$ pour tout n

(c) Faux. Prendre $a_n = n$.

(d) Vrai. $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a| = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ ||a_n - a| - 0| \leq \varepsilon$. Comme $||a_n - a| - 0| = |a_n - a|$, c'est vrai si et seulement si $\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |a_n - a| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

(e) Faux. Prendre par exemple $a_n = (n-10)^2$.

(f) Faux. Prendre $a_n = 2n$ et $b_n = n$.

(g) Faux. Prendre $a_n = n$ et $b_n = 0$.

(h) Vrai. Posons $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \ell_2$. Pour n assez grand, $b_n \neq 0$ et donc $a_n = \dfrac{a_n b_n}{b_n}$, d'où

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n b_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{\ell_2}{\ell}.$$

(i) Vrai. On a

$$0 \leq |a_n| \leq \sup\{|a_{\geq n}|\}.$$

La suite à droite converge vers 0 (définition de $\limsup$) et donc $|a_n| \to 0$ par le théorème des deux gendarmes.

(j) Faux. Prendre $a_n = 1 + (-1)^n$. La suite vaut alors $0, 2, 0, 2, 0, 2, \ldots$, donc $\liminf\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, mais (a_n) diverge (car $(-1)^n$ diverge).

Solution 7.

(a) C'est une récurrence linéaire: $a_{n+1} = qa_n + b$ où $q = \frac{1}{4}$ et $b = \frac{3}{4}$. Comme $|q| < 1$, la suite a_n converge vers $\frac{3/4}{1-1/4} = 1$.

(b) C'est une récurrence linéaire: $a_{n+1} = qa_n + b$ où $q = -\frac{3}{2}$ et $b = 1$. Comme $|q| > 1$ et $a_0 \neq \ell$ la suite diverge.

(c) Si une limite existe, elle doit être solution de $x = g(x)$, où $g(x) = \frac{7}{3} - \frac{1}{1+x}$. On obtient une équation du second degré, dont les solutions sont $x = -\frac{2}{3}$ et $x = 2$. On montre alors par récurrence que $a_n \geq 0$, donc la seule limite possible est $\ell = 2$. On continue en remarquant que

$$|a_{n+1} - 2| = \left|\frac{7}{3} - \frac{1}{1+a_n} - 2\right| = \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{1+a_n}\right| = \frac{1}{3}\frac{|a_n - 2|}{1+a_n} \leq \frac{1}{3}|a_n - 2|.$$

On transforme cela en une preuve par récurrence que $|a_n - 2| \leq \frac{1}{3^n}|a_0 - 2| = \frac{1}{3^n}$. Comme $\frac{1}{3^n} \longrightarrow 0$, cela montre que $|a_n - 2| \longrightarrow 0$.

(d) Si une limite existe, elle doit être solution de $x = g(x)$, où $g(x) = \frac{x^2+6}{5}$. On obtient une équation du second degré, dont les solutions sont $x = 2$ et $x = 3$. On calcule quelques termes, et on s'aperçoit que $0 \leq a_n \leq \frac{5}{2}$, ce qu'on s'empresse de montrer par récurrence. Ainsi la seule limite possible est $\ell = 2$. On calcule alors

$$|a_{n+1} - 2| = \left|\frac{a_n^2 + 6}{5} - 2\right| = \frac{|a_n + 2|}{5}|a_n - 2| \leq \frac{\frac{5}{2} + 2}{5}|a_n - 2| = \frac{9}{10}|a_n - 2|.$$

On transforme cela en preuve par récurrence que $|a_n - 2| \leq (\frac{9}{10})^n|a_0 - 2| \longrightarrow 0$, et donc $|a_n - 2| \longrightarrow 0$, i.e., $a_n \longrightarrow 2$.