Série 4

1. Etudier la convergence des suites récurrentes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ définies par :
   (a) $x_{n+1} = x_n - \ln(1 + x_n^2), \quad x_0 = \dfrac{1}{2}$
   (b) $x_{n+1} = \dfrac{x_n + 1}{2}, \quad x_0 \in \mathbb{R}$
   (c) $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 3}{4}, \quad x_0 \geq 1$
   (d) $(\star)$ $x_{n+1} = a + \dfrac{b}{x_n}, \quad x_0 > 0 \quad (a, b > 0)$
   Indication : Commencer par montrer que les sous-suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

2. $(\star\star)$ Démontrer le *théorème de Stolz–Cesàro* :
   Soit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ avec $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante, et $a_n, b_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$.
   $$\text{Si} \quad \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \ell \in \mathbb{R}, \quad \text{alors} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell.$$
   Indication : Reformuler le résultat en utilisant $u_n := a_{n+1} - a_n$ et $v_n := b_{n+1} - b_n$..

3. Calculer les limites suivantes :
   $$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^p} \quad (p \in \mathbb{N}^*) \qquad \text{(b)} \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln(n)}{\ln(n!)} \qquad \text{(c)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p \quad (p \in \mathbb{N})$$

4. (a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, \infty)$. Prouver la proposition suivante :
   $$\text{si} \quad \exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell \in [0, \infty), \quad \text{alors} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \ell.$$
   La réciproque est-elle vraie ?
   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

5. (a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{P(n)} = 1$ pour tout polynôme $P(x)$ de coefficient dominant positif.
   Indication : Utiliser le théorème des deux gendarmes.

6. Démontrer les résultats suivants à l'aide des définitions de limite finie/infinie :
   (a) Si (x_n) est bornée et $y_n \to 0$, alors $x_n y_n \to 0$.
   (b) Si (x_n) est bornée et $y_n \to \pm\infty$, alors $x_n/y_n \to 0$.
   (c) S'il existe $\delta > 0$ tel que $x_n \geq \delta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $y_n \to \pm\infty$, alors $x_n y_n \to \pm\infty$.
   (d) Si $x_n \to a \neq 0$ et $y_n \to \pm\infty$, alors $x_n y_n \to \pm\,\mathrm{sgn}(a)\infty$.
   (e) Si $a > 1$ et $x_n \to +\infty$, alors $a^{x_n} \to +\infty$.
   Rappel : Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction puissance t^α est définie par $t^\alpha := e^{\alpha\ln(t)}$, pour tout $t \in (0, \infty)$.

7. Etudier dans chaque cas la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}$ de terme général :
   $$\text{(a)}\ u_n = \frac{n^2\sin(n) - n\cos(n)}{n^3 + 1} \quad \text{(b)}\ u_n = \frac{(1+a)^n(1-n)}{n+1} \quad (a > 0) \quad \text{(c)}\ u_n = \frac{\ln\left(2 + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)}{n^{-1}\left(2 + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)}$$